解答例

STEP III 2004、第 6 問

純粋数学 ・ 漸化式

STEP III 2004、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/04-s3-q6

鍵となる考え方

式 F_n は、隣り合う項の組ごとに定まる量であり、冒頭の恒等式は、ある組から次の組に移るときにこの量が変わらないのはどのような場合かを正確に教えてくれる。(i) の漸化式（recurrence）では第 2 の因数が 0 になるので、F_n は不変量（invariant）であり、その初期値だけを求めればよい。(ii) はこの議論を逆にたどる。F_n が一定ならば積は 0 でなければならず、したがって各段階で二つの因数のどちらかが 0 となる。こうして各段階で選択の余地が生じ、うまく選ぶことで周期（period）4 の数列が得られるのである。

解答

恒等式

両方の項を書き出すと、w_{n-1}^2 の項は打ち消し合う。

$$\begin{aligned} F_n - F_{n-1} &= (w_n^2 + w_{n-1}^2 - 4w_n w_{n-1}) - (w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2 - 4w_{n-1}w_{n-2}) \\ &= (w_n^2 - w_{n-2}^2) - 4w_{n-1}(w_n - w_{n-2}) \\ &= (w_n - w_{n-2})(w_n + w_{n-2}) - 4w_{n-1}(w_n - w_{n-2}) \\ &= (w_n - w_{n-2})(w_n + w_{n-2} - 4w_{n-1}), \end{aligned}$$

これは $n \geq 2$ で成り立つ（w_{n-2} が存在する必要があるため）。以上で示された。

もう一つ、全体を通して役に立つ事実を述べておく。F_n は w_n と w_{n-1} について**対称**（symmetric）である。すなわち、両者を入れ替えても $w_n^2 + w_{n-1}^2 - 4w_n w_{n-1}$ は変わらない。

小問 (i)

$w_n = u_n$ とし、対応する量を F_n とする。$n \geq 2$ に対して漸化式より $u_n + u_{n-2} - 4u_{n-1} = 0$ であるから、恒等式の第 2 の因数は 0 であり、

$$F_n = F_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

よって、すべての $n \geq 1$ に対して $F_n = F_1$ であり、

$$F_1 = u_1^2 + u_0^2 - 4u_1u_0 = 4 + 1 - 8 = -3.$$

したがって $u_n^2 + u_{n-1}^2 - 4u_nu_{n-1} = -3$、すなわち、すべての $n \geq 1$ に対して $u_n^2 + u_{n-1}^2 = 4u_nu_{n-1} - 3$ が成り立つ。以上で示された。（数列は $1, 2, 7, 26, 97, \ldots$ と続く。）

小問 (ii)(a)

$(*)$ に $n = 1$ と $v_0 = 1$ を代入すると、

$$v_1^2 + 1 = 4v_1 - 3 \iff v_1^2 - 4v_1 + 4 = 0 \iff (v_1 - 2)^2 = 0,$$

よって $v_1 = 2$ である。これは重解（repeated root）なので、ここには選択の余地はない。

次に $w_n = v_n$ とする。条件 $(*)$ は、まさにすべての $n \geq 1$ に対して $F_n = -3$ であることを意味する。したがって $n \geq 2$ では F_n と F_{n-1} はともに -3 であり、恒等式から

$$0 = F_n - F_{n-1} = (v_n - v_{n-2})(v_n + v_{n-2} - 4v_{n-1}).$$

二つの実数の積が 0 になるのはどちらかが 0 のときに限るから、$v_n = v_{n-2}$ または $v_n = 4v_{n-1} - v_{n-2}$ である。以上で示された。

> **考えてみよう** これで全部だろうか。二つの選択肢はどちらも本当に条件を満たす次の項を与えるのだろうか。

そのとおりである。v_{n-1} を固定すると、条件 $(*)$ は $x = v_n$ についての二次方程式 $x^2 - 4v_{n-1}x + (v_{n-1}^2 + 3) = 0$ である。F は対称であり $F_{n-1} = -3$ であるから、$x = v_{n-2}$ はその解である。二つの解の和は $4v_{n-1}$ なので、もう一方の解は $4v_{n-1} - v_{n-2}$ である。つまり、(a) の二つの選択肢はちょうどこの二つの解にあたる。各段階でどちらを選んでもよく、得られる数列は常に $(*)$ を満たす。（$n = 1$ のように二つの解が一致する場合は、選択肢は一つしかない。）

小問 (ii)(b)

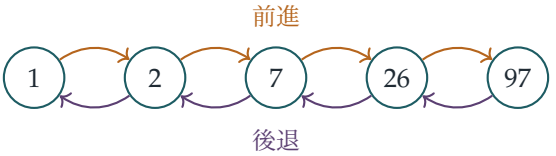
ここでは $v_0 = 1$ であり、条件どおりである。また、隣り合う項の組 (v_{n-1}, v_n) はすべて $(1,2)$ か $(2,1)$ のいずれかである。F は対称なので、どちらの場合も

$$v_n^2 + v_{n-1}^2 - 4v_n v_{n-1} = 1 + 4 - 8 = -3,$$

となり、すべての $n \geq 1$ に対して $(*)$ が成り立つ。(a) の言葉でいえば、この数列は常に $v_n = v_{n-2}$ の選択肢をとっている。

小問 (ii)(c)

$v_0 = 1$、$v_1 = 2$ である。(a) より、それ以降の各項は、二つ前の項（「後退」）か、$4\times$（直前の項）$-$（その一つ前の項）（「前進」）のいずれかである。$(1,2)$ から前進すると 7 が得られ、さらに 26、97 と続く。これは数列 u_n である。後退は直前の前進を取り消す。



したがって、この数列はこの鎖の上を 1 から出発して毎回隣の数へ移動していく歩みである。1 の隣は一つしかないので、1 を訪れた直後には必ず 2 へ進む。

$v_0 = 1$ で周期 4 にするには、$v_4 = 1$ でなければならない。(b) の周期 2 の数列は 1 と 2 の間を往復するだけである。新しいものを得るには、もう一歩先へ進めばよい。

$$v_0 = 1, \quad v_1 = 2, \quad v_2 = 4 \cdot 2 - 1 = 7, \quad v_3 = v_1 = 2, \quad v_4 = v_2 \text{ または } 4 \cdot 2 - 7 = 1.$$

$v_4 = 1$ を選び、以後これを繰り返すと、

$$v_n = \begin{cases} 1 & n \equiv 0 \pmod 4, \\ 2 & n \text{ が奇数}, \\ 7 & n \equiv 2 \pmod 4, \end{cases} \qquad \text{すなわち} \quad 1,2,7,2,1,2,7,2,\ldots$$

$(*)$ を直接確かめよう。隣り合う項の組はすべて $(1,2)$、$(2,7)$、$(7,2)$、$(2,1)$ のいずれかである。対称性より、確かめるべきは

$$1 + 4 - 8 = -3 \quad \text{および} \quad 4 + 49 - 56 = -3,$$

だけであり、どちらも成り立つ。よって $(*)$ はすべての $n \geq 1$ に対して成り立ち、この数列は周期 4 をもつ（$v_2 \neq v_0$ なので周期 2 ではない）。

実は、ちょうど周期 4 となる答えはこれだけである。1, 2 の後、歩みは $v_4 = 1$ とならなければならないので、7 に到達できるのは v_2 のときだけであり、そこからすぐに引き返さなければならない。

検算

- $n = 40$ まで u_n を計算し、毎回 $u_n^2 + u_{n-1}^2 - 4u_n u_{n-1} = -3$ となることを確かめよ。たとえば $(26, 97)$ では $676 + 9409 - 10088 = -3$ である。
- 冒頭の恒等式を、数千組のランダムな整数の三つ組で試してみよ。
- 1, 2 から始めて、(a) で許される数列を v_8 まですべて書き出せ。全体を通して $v_{k+4} = v_k$ となるのは $1, 2, 1, 2, \ldots$ と $1, 2, 7, 2, \ldots$ だけである。

よくある間違い

- (ii) で理由を述べずに $F_n - F_{n-1} = 0$ と結論すること。その理由は、$(*)$ によってすべての F_n が -3 に等しくなるからである。
- v_1 が一意に定まることを見落とすこと。二次方程式は重解 2 をもつので、場合分けは不要である。
- (c) で一周期分の組だけを確かめ、「折り返し」の組 $(v_3, v_4) = (2, 1)$ を忘れること。

STEP のその先へ

量 F_n はこの漸化式の**不変量**、つまり力学におけるエネルギーのような保存量である。方程式 $x^2 + y^2 - 4xy = -3$ は、マルコフ（Markov）型（あるいはペル（Pell）型）のディオファントス方程式（Diophantine equation）である。二次方程式の一方の解をもう一方の解に取り替える操作 $x \mapsto 4y - x$ は、古典的な「ヴィエタ・ジャンピング（Vieta jumping）」の手法であり、最小の解からすべての整数解を生成する。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等整数論』）では、ペル方程式と、漸化式によるその解が扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。