解答例

STEP III 2004、第 5 問

純粋数学 ・ 三角方程式

> **STEP III 2004、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s3-q5

鍵となる考え方

2 つのコサインが等しくなるのは、それらの角が符号と 2π の整数倍の違いを除いて一致するとき、かつそのときに限る。タンジェントに移ると、θ と $\theta+\pi$ を区別する情報が失われるので、含意は一方向にしか成り立たない。これが反例（counterexample）の要点である。小問 (i) と (ii) では、$a\cos x + b\sin x$ を $R\cos(x-\alpha)$ の形に直し、最初の結果を用いて $\tan x$ を $\tan\omega$ で表し、さらに角の大きさを用いて正しい象限（quadrant）を選ぶ。

解答

最初の結果

$\cos(x-\alpha)=\cos\beta$ ならば、コサインは偶関数で周期（period）2π をもつので、ある整数 n について $x-\alpha=\pm\beta+2n\pi$ となる。よって

$$x=\alpha+\beta+2n\pi \quad \text{または} \quad x=\alpha-\beta+2n\pi.$$

tan は周期 π をもち、したがって当然周期 2π ももつので、これより $\tan x=\tan(\alpha+\beta)$ または $\tan x=\tan(\alpha-\beta)$ が得られる（これらのタンジェントが定義される限り）。

逆（converse）が成り立たないのは、tan は周期 π をもつが cos はそうではないからである。$\alpha=\beta=0$、$x=\pi$ とする。すると $\tan x=0=\tan(\alpha+\beta)$ であるが、

$$\cos(x-\alpha)=\cos\pi=-1\neq 1=\cos\beta.$$

一般に、$x=\alpha+\beta+\pi$ とすると $\cos(x-\alpha)=-\cos\beta$ となる。

ω についての2つの事実が役に立つ。$\tan\omega = \frac{4}{3}$ より、$\cos\omega = \frac{3}{5}$、$\sin\omega = \frac{4}{5}$ である。また $\frac{4}{3} > 1$ より、$\frac{\pi}{4} < \omega < \frac{\pi}{2}$ である。

小問 (i)

ここでは $\sqrt{1^2+7^2} = 5\sqrt{2}$ なので、$5\sqrt{2}$ で割ると

$$\tfrac{1}{5\sqrt{2}}\cos x - \tfrac{7}{5\sqrt{2}}\sin x = \tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

$\cos\varphi = \frac{1}{5\sqrt{2}}$、$\sin\varphi = \frac{7}{5\sqrt{2}}$ を満たす鋭角を φ とすると、$\tan\varphi = 7$ である。方程式は

$$\cos(x+\varphi) = \cos\tfrac{\pi}{4},$$

となり、これは $\alpha = -\varphi$、$\beta = \frac{\pi}{4}$ とした最初の結果にあたる。$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$ を用いると

$$\tan(\alpha+\beta) = \tan(\tfrac{\pi}{4} - \varphi) = \frac{1-7}{1+7} = -\frac{3}{4},$$
$$\tan(\alpha-\beta) = -\tan(\varphi + \tfrac{\pi}{4}) = -\frac{7+1}{1-7} = \frac{4}{3}.$$

考えてみよう これらのタンジェントの値はそれぞれ $[0, 2\pi]$ 内の2つの角に対応するが、方程式はそこに解を2つしかもたない。それはどの2つか？

反例が示したように、タンジェントだけではこれを決められないので、$x = \alpha \pm \beta + 2n\pi$ に戻り、$\alpha \pm \beta$ が実際にどこにあるかを調べる。$\tan\varphi = 7 > 1$ より、$\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ である。

- $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} - \varphi$ は $(-\frac{\pi}{4}, 0)$ にあり、タンジェントは $-\frac{3}{4}$ である。ここで $\tan(\frac{\pi}{2} - \omega) = \cot\omega = \frac{3}{4}$ であり、$\frac{\pi}{2} - \omega \in (0, \frac{\pi}{4})$ である。よって $\alpha + \beta = \omega - \frac{\pi}{2}$ であり、2π を加えると $x = \frac{3\pi}{2} + \omega$ を得る。
- $\alpha - \beta = -\varphi - \frac{\pi}{4}$ は $(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2})$ にあり、タンジェントは $\frac{4}{3}$ である。角 $\omega - \pi$ もこの区間にあり、タンジェントは $\frac{4}{3}$ である。タンジェントは、漸近線を含まない長さ π 未満の区間上で一対一であるから、$\alpha - \beta = \omega - \pi$ である。2π を加えると $x = \pi + \omega$ を得る。

$0 < \omega < \frac{\pi}{2}$ であるから、どちらの値も $[0, 2\pi]$ に含まれ、他の n を選んでもこの範囲の値は得られない。したがって

$$x = \pi + \omega \quad \text{または} \quad x = \tfrac{3\pi}{2} + \omega.$$

確認のため、$x = \pi + \omega$ では $\cos x - 7\sin x = -\frac{3}{5} + \frac{28}{5} = 5$ となり、$x = \frac{3\pi}{2} + \omega$ では $\cos x = \sin\omega$、$\sin x = -\cos\omega$ であるから $\frac{4}{5} + \frac{21}{5} = 5$ となる。

小問 (ii)

ここでは $\sqrt{2^2+11^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$ なので

$$\frac{2}{5\sqrt{5}}\cos x+\frac{11}{5\sqrt{5}}\sin x=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$\cos\alpha=\frac{2}{5\sqrt{5}}$、$\sin\alpha=\frac{11}{5\sqrt{5}}$ を満たす鋭角を α とすると、$\tan\alpha=\frac{11}{2}$ である。$\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ を満たす鋭角を β とすると、$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$、$\tan\beta=\frac{1}{2}$ である。方程式は $\cos(x-\alpha)=\cos\beta$ となり、

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\frac{11}{2}-\frac{1}{2}}{1+\frac{11}{4}}=\frac{5}{15/4}=\frac{4}{3},$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{11}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{11}{4}}=\frac{6}{-7/4}=-\frac{24}{7}.$$

2 つ目の値は $\tan 2\omega$ に等しい。実際、

$$\tan 2\omega=\frac{2\cdot\frac{4}{3}}{1-\frac{16}{9}}=\frac{8/3}{-7/9}=-\frac{24}{7}.$$

再び角の位置を定める。α と β はどちらも鋭角であるから、

- $\alpha-\beta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ でタンジェントは $\frac{4}{3}$ であるから、$\alpha-\beta=\omega$ である。
- $\alpha+\beta\in(0,\pi)$ でタンジェントは負であるから、$(\frac{\pi}{2},\pi)$ にある。$\frac{\pi}{4}<\omega<\frac{\pi}{2}$ より、角 2ω も $(\frac{\pi}{2},\pi)$ にあり、同じタンジェントをもつので、$\alpha+\beta=2\omega$ である。

ω と 2ω はともに $[0,2\pi]$ に含まれ、$\pm2\pi$ を加えるとその外に出る。よって解は

$$x=\omega\quad\text{および}\quad x=2\omega,$$

であり、題意のとおり一方の解はもう一方の 2 倍である。直接確かめると、$x=\omega$ では $\frac{6}{5}+\frac{44}{5}=10$ となる。$x=2\omega$ では $\cos 2\omega=\frac{9-16}{25}=-\frac{7}{25}$、$\sin 2\omega=\frac{24}{25}$ であるから、$-\frac{14}{25}+\frac{264}{25}=10$ となる。

検算

- $5<5\sqrt{2}$ かつ $10<5\sqrt{5}$ であり、右辺は $-R$ と R の間に厳密に含まれるので、各方程式は $[0,2\pi]$ にちょうど 2 つの解をもつはずである。
- 数値的には $\omega\approx0.9273$ である。符号変化による探索を行うと、(i) では解 4.0689 と 5.6397 が得られ、これらは $\pi+\omega$ と $\frac{3\pi}{2}+\omega$ である。(ii) では 0.9273 と 1.8546 が得られ、これらは ω と 2ω である。

よくある間違い

- $\tan x = \frac{4}{3}$ または $\tan x = -\frac{3}{4}$ を解いて、$[0, 2\pi]$ 内の 4 つの角をすべて挙げてしまうこと。そのうち 2 つは、まさに反例が示す理由により余分な解である。
- (i) で φ の符号を誤ること。たとえば $\cos x - 7\sin x$ に対して $\cos(x + \varphi)$ ではなく $\cos(x - \varphi)$ と書いてしまう。

STEP のその先へ

ここでの難しさは、tan が単射（injective）でないことにある。そのため「$\tan x = \tan y$」からわかるのは、π を法とした x だけである。複素解析（complex analysis）では、同じ問題が偏角（argument）や $\log z$ の分枝（branch）の定義に現れ、そこでは角は 2π の整数倍の違いを除いてしか定まらない。その枠組みでは $a\cos x + b\sin x = \mathrm{Re}\left((a - \mathrm{i}b)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)$ であり、R と α は単に $a + \mathrm{i}b$ の絶対値（modulus）と偏角にほかならない。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、この幾何学的な見方を見事に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。