解答例

STEP III 2004、第 4 問

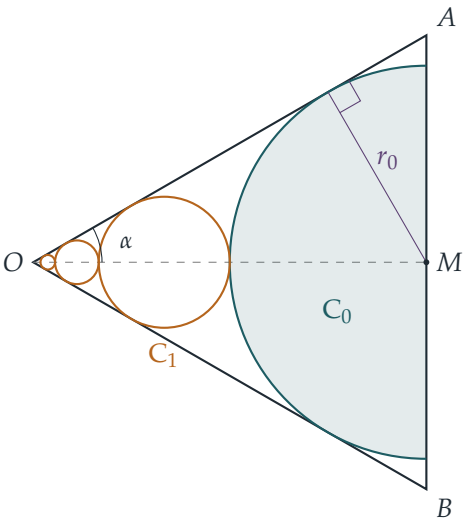
純粋数学 ・ 接する円と級数

> **STEP III 2004、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s3-q4

鍵となる考え方

OA と OB の両方に接する（touch）円の中心はすべて角 AOB の二等分線（bisector）上にあり、その中心の O からの距離は半径によって決まる。O における角が α の直角三角形を考えると、距離 $= r/\sin\alpha$ となるのである。「2 つの円が接する」という条件をこれらの距離の方程式として書くと、隣り合う半径どうしが結びつき、半径は等比数列（geometric progression）をなすことがわかる。すると面積は等比級数（geometric series）をなし、最後の小問は 1 変数の最大化（maximisation）の問題（あるいは α の値をうまく選ぶ問題）になる。

解答



半径の比

M を AB の中点とする。$OA = OB$ であるから、直線 OM は角 AOB を二等分し、AB に垂直である。角 AOM と角 BOM はいずれも α である。

直線 OA と OB の両方に接する半径 r の円を任意にとる。その中心は 2 直線から等距離にあるので、二等分線 OM 上にある。中心を P とし、円が OA に点 T で接するとすると、$PT \perp OA$、$PT = r$ であり、角 $POT = \alpha$ であるから、直角三角形 OTP において

$$OP = \frac{r}{\sin\alpha}.$$

これは C_0（中心 M）にも、すべての C_n にも当てはまる。O から C_n の中心までの距離を $d_n = r_n / \sin\alpha$ と書く。

C_{n+1} は C_n と O の間の隅に収まっている（この円は辺 OA と OB そのものに接し、その延長に接するのではないから、角の内側で、しかも C_n から見て O の側になければならない）。外接（touch externally）する 2 つの円の中心間の距離は $r_n + r_{n+1}$ であり、ここでは両方の中心が OM 上にあるから、

$$d_n - d_{n+1} = r_n + r_{n+1}.$$

$d_n = r_n / \sin\alpha$ を代入し、両辺に $\sin\alpha$ を掛けると、

$$r_n - r_{n+1} = (r_n + r_{n+1})\sin\alpha$$
$$r_n(1 - \sin\alpha) = r_{n+1}(1 + \sin\alpha),$$

したがって

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha},$$

となり、示すべき式が得られた。これは $n=0$ のときにも成り立つ。C_1 は半円の弧の部分に接し、その部分は C_0 のうち O に面した半分だからである。

面積の総和

$k = \dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$ とおく。$0 < \sin\alpha < 1$ であるから $0 < k < 1$ であり、$r_n = k^n r_0$ である。半円の面積は $\frac{1}{2}\pi r_0^2$、C_n の面積は $\pi k^{2n} r_0^2$ である。級数 $\sum_{n\geq 1} k^{2n}$ は公比 $k^2 < 1$ の等比級数であるから、$k^2/(1-k^2)$ に収束（converge）する。よって

$$S = \pi r_0^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{k^2}{1-k^2}\right).$$

ここで

$$1-k^2 = \frac{(1+\sin\alpha)^2 - (1-\sin\alpha)^2}{(1+\sin\alpha)^2} = \frac{4\sin\alpha}{(1+\sin\alpha)^2}, \qquad \text{よって} \qquad \frac{k^2}{1-k^2} = \frac{(1-\sin\alpha)^2}{4\sin\alpha}.$$

ゆえに

$$S = \pi r_0^2 \frac{2\sin\alpha + 1 - 2\sin\alpha + \sin^2\alpha}{4\sin\alpha} = \frac{1+\sin^2\alpha}{4\sin\alpha}\,\pi r_0^2,$$

となり、求める結果が得られた。

三角形との比較

最初の小問より $OM = d_0 = r_0/\sin\alpha$ である。直角三角形 OMA において $AM = OM\tan\alpha$ であるから、三角形 OAB の面積は

$$T = OM \cdot AM = OM^2 \tan\alpha = \frac{r_0^2}{\sin^2\alpha} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{r_0^2}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

（半円は確かに底辺上に収まる：$r_0 = OM\sin\alpha < OM\tan\alpha = AM$。）割り算すると、

$$\frac{S}{T} = \frac{\pi}{4}(1+\sin^2\alpha)\cos\alpha.$$

考えてみよう α としてどの値を試すべきだろうか？

$\alpha \to 0$ のとき比は $\pi/4 \approx 0.785$ に近づき、0.8 にわずかに届かない。したがって非常に細い三角形ではうまくいかない。自然な最初の試みは O における角を直角にすること、すなわち $\alpha = \pi/4$ である。このとき $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}$、$\cos\alpha = 1/\sqrt{2}$ であるから、

$$\frac{S}{T} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}}.$$

これが $\frac{4}{5}$ を超えるのは、ちょうど $15\pi > 32\sqrt{2}$ のときである。両辺は正であるから 2 乗してよく、条件は $225\pi^2 > 2048$、すなわち $\pi^2 > 9.102\ldots$ となる。$\pi > 3.1$ より $\pi^2 > 9.61$ であるから、この不等式は成り立つ。ゆえに $\alpha = \pi/4$ のとき（さらに連続性（continuity）により $\pi/4$ に近いすべての α について）、円は三角形の 5 分の 4 より多くを覆う。

参考までに述べておくと、最良の α は $c = \cos\alpha$ として $f(c) = (2 - c^2)c$ を最大化すれば得られる。$f'(c) = 2 - 3c^2 = 0$ より $\cos\alpha = \sqrt{2/3}$、すなわち $\sin\alpha = 1/\sqrt{3}$ であり、比の最大値は $\pi\sqrt{6}/9 \approx 0.855$ である。

検算

- $\alpha \to \pi/2$ のとき三角形はつぶれて $k \to 0$ となる。円 C_n は消え、$S \to \frac{1}{2}\pi r_0^2$ となって、$\frac{1+1}{4}\pi r_0^2$ と一致する。
- $\alpha = \pi/6$ のとき $k = \frac{1}{3}$ であり、$S = \pi r_0^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1/9}{8/9}\right) = \frac{5}{8}\pi r_0^2$ となる。公式からは $\frac{1+1/4}{2}\pi r_0^2 = \frac{5}{8}\pi r_0^2$ が得られる。
- 数値的にも、ランダムな α に対して接する条件から直接 3000 個の円を構成すると、両方の公式が約 10^{-15} の精度で再現され、$\alpha = \pi/4$ における比は 0.8330 となる。

よくある間違い

- C_0 を円全体として数えてしまうこと。これは半円であり、そのために $\frac{1}{2}$ が現れるのである。
- $d_n + d_{n+1} = r_n + r_{n+1}$ や $d_n - d_{n+1} = r_n - r_{n+1}$ を使ってしまうこと。円どうしは外接しており、両方の中心は O から見て同じ側にある。
- 最後の小問で小さな α を試すこと。そこでは比は $\pi/4 < \frac{4}{5}$ に近づく。

STEP のその先へ

この円の列は、O を中心とし倍率 k の 1 つの相似拡大（dilation、enlargement）によって生成される。この写像は隅の領域を自分自身に写し、各円を次の円に写す。このような自己相似な配置は、フラクタル（fractal）や、アポロニウス（Apollonius）の円充填（Apollonian circle packing）へとつながっていく。円充填では、互いに接する円の曲率（curvature）がデカルト（Descartes）の円定理（Descartes' circle theorem）に従う。円を直線に変える変換である反転（inversion）を用いると、このような接する円の問題の多くが易しくなる。Needham の *Visual Complex Analysis*（複素解析を視覚

的に解説した本）は、これを見事に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。