解答例

STEP III 2004、第 3 問

純粋数学 ・ 凸性と級数の評価

STEP III 2004、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/04-s3-q3

鍵となる考え方

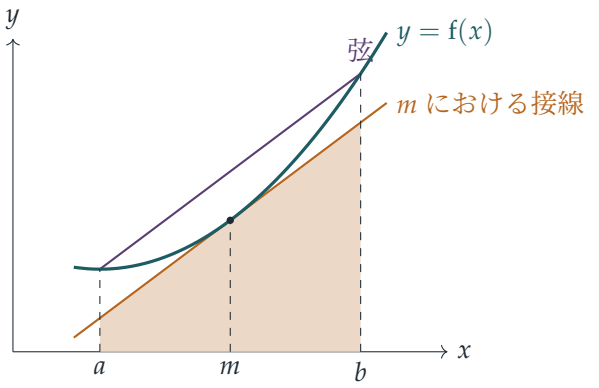
$\mathrm{f}'' > 0$ ならば、曲線は上に向かって曲がっている。したがって曲線はすべての接線（tangent line）より上にあり、すべての弦（chord）より下にある。中点における接線と、端から端までの弦は、それぞれ面積が簡単に書き下せる台形（trapezium）を切り取り、この二つの面積が積分を挟み込む。$[n-1, n]$ 上で $\mathrm{f}(x) = 1/x^2$ とすると、積分は隣り合う項が打ち消し合う形（telescoping）になる。そこで不等式を n について足し合わせると、$\sum 1/n^2$ の評価が得られる。

解答

積分に対する二つの評価

$m = \frac{1}{2}(a+b)$ とおく。$[a, b]$ 上で $\mathrm{f}'' > 0$ であるから、傾き f' は狭義単調増加であり、曲線は凸（convex）である。ここから二つの事実が得られる。

- 曲線は m における接線より上にある。$t(x) = \mathrm{f}(m) + \mathrm{f}'(m)(x-m)$、$g = \mathrm{f} - t$ とおく。すると $g(m) = g'(m) = 0$ かつ $g'' = \mathrm{f}'' > 0$ であるから、g' は増加する。よって m の左側では $g' < 0$、右側では $g' > 0$ となり、g は m で狭義の最小値 0 をとる。したがって $x \neq m$ に対して $\mathrm{f}(x) > t(x)$ である。
- 曲線は弦より下にある。$c(x)$ を $(a, \mathrm{f}(a))$ と $(b, \mathrm{f}(b))$ を通る直線とし、$h = \mathrm{f} - c$ とおく。すると $h(a) = h(b) = 0$ かつ $h'' > 0$ である。もし h が (a, b) の内部で ≥ 0 となる値をとるならば、そこで $h'' \leq 0$ となる最大値をもつことになるが、これは不可能である。よって $a < x < b$ に対して $\mathrm{f}(x) < c(x)$ である。



次に $[a,b]$ 上で面積を比較する。接線の下の部分は幅 $b-a$ の台形である。その平均の高さは中点における t の高さ $t(m)=\mathrm{f}(m)$ であるから、面積は $(b-a)\,\mathrm{f}(m)$ である（網掛け部分）。弦の下の部分は平行な辺が $\mathrm{f}(a)$ と $\mathrm{f}(b)$ の台形であるから、面積は $(b-a)\frac{1}{2}\big(\mathrm{f}(a)+\mathrm{f}(b)\big)$ である。曲線は孤立した点を除いて二つの直線の厳密に間にある。よって

$$(b-a)\,\mathrm{f}\Big(\frac{a+b}{2}\Big) < \int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x < (b-a)\,\frac{\mathrm{f}(a)+\mathrm{f}(b)}{2}.$$

（図では f が正の場合を描いている。この議論は実際には $\int(\mathrm{f}-t)>0$ と $\int(c-\mathrm{f})>0$ についてのものなので、f の符号は関係ない。）

a、b、f の選び方

中央の項 $\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$ は $\big[-\frac{1}{x}\big]_{n-1}^{n}$ の形に見えるので、$\mathrm{f}(x)=1/x^2$、$a=n-1$、$b=n$ とする。すると $b-a=1$ であり、$n-1\geq 1>0$ であるから $[n-1,n]$ 上で $\mathrm{f}''(x)=6/x^4>0$ である。また

$$\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n},\qquad \mathrm{f}\Big(\frac{2n-1}{2}\Big)=\frac{4}{(2n-1)^2},$$

であるから、前半の結果より

$$\frac{4}{(2n-1)^2}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}<\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n-1)^2}\Big)\qquad (n\geq 2),$$

が得られ、これが示すべきことであった。

1 に対する二つの評価の導出

$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ とおく。$n\geq 2$ に対して $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$ であり、これらの項は打ち消し合うので、この級数は収束（converge）する。$n=2,3,\ldots,N$ に対する不等式を足し合わせる。中央の項は打ち消し合って $1-\frac{1}{N}$ となり、これは 1 に近づく。

考えてみよう $N \to \infty$ とすると、厳密な不等式はふつう $\leq$ になってしまう。どうすれば厳密なままにできるだろうか？

差に注目する。各 $n \geq 2$ に対して、差 $d_n = \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) - \frac{4}{(2n-1)^2}$ は正である。よって差の無限和は少なくとも初項 $d_2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18} > 0$ 以上である。ここに現れる級数はすべて収束するので項ごとに和をとってよく、和の差は厳密に正である。右側の不等式についても同じ議論が成り立つ。

左側では、$n = 2, 3, 4, \ldots$ に対して $2n - 1 = 3, 5, 7, \ldots$ であるから

$$4\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right) < 1.$$

右側では

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2}\right) = \frac{1}{2}(S-1) + \frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + (S-1),$$

であるから

$$1 < \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right).$$

奇数の平方との比較

左辺の級数を、奇数番目の項とそれに続く偶数番目の項の連続する組にまとめる。$k \geq 2$ に対して、$2k > 2k - 1 > 0$ であるから

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{(2k)^2}\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{(2k-1)^2}\right) = \frac{1}{(2k-1)^2},$$

が成り立つ。$k = 2, 3, 4, \ldots$ とすると、左辺の組は $(3^2, 4^2)$、$(5^2, 6^2), \ldots$ となり、全体として $\frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{5^2}, \ldots$ の各項をちょうど一度ずつ用いる。（すべての項が正であり級数が収束するので、このようにまとめてよい。）右辺は $\frac{1}{3^2}, \frac{1}{5^2}, \ldots$ である。先ほどと同様に厳密性を保ったまま k について和をとると

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots\right) < \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots.$$

S に対する評価

下からの評価。 右側の不等式より $1 < \frac{1}{2} + (S-1)$ であるから、$S > \frac{3}{2}$ である。

上からの評価。 $T = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = S - 1 - \frac{1}{4}$ とおく。最後の比較と左側の不等式を組み合わせると

$$\frac{1}{2}T < \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots < \frac{1}{4},$$

となるので、$T < \frac{1}{2}$ である。よって $S = 1 + \frac{1}{4} + T < \frac{7}{4}$ である。以上をまとめると

$$\frac{3}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{7}{4}.$$

検算

- 真の値は $S = \pi^2/6 \approx 1.6449$ であり、$(1.5, 1.75)$ の中にある。
- 数値的には $4\sum_{k\geq 2}(2k-1)^{-2} = 4(\pi^2/8 - 1) \approx 0.935 < 1$、$\frac{1}{2} + (S-1) \approx 1.145 > 1$ である。
- 比較については $\frac{1}{2}T \approx 0.197 < 0.234 \approx \sum_{k\geq 2}(2k-1)^{-2}$ である。
- $n = 2$ を試すと $\frac{4}{9} \approx 0.444 < \frac{1}{2} < \frac{5}{8} = 0.625$ となる。$2 \leq n \leq 2000$ について厳密な分数で確かめると、三つの不等式がすべて成り立つことが確認できる。

よくある間違い

- 抜けている $\frac{1}{4}$ を忘れること。括弧内は $\frac{1}{3^2}$ から始まるので、$T = S - \frac{5}{4}$ であって $S - 1$ ではない。$S - 1$ を用いると、$S < \frac{3}{2}$ という誤った主張が導かれてしまう。
- 不等式の向きを逆にすること。上に向かって曲がる曲線では、接線（中点）による見積もりは小さすぎ、弦（台形）による見積もりは大きすぎる。
- 無限和に移行する際、「$<$」が極限をとっても保たれる理由を述べずに、黙ってそのまま使うこと。

STEP のその先へ

二つの評価は中点則（midpoint rule）と台形則（trapezium rule）である。凸性からそれぞれがどちら向きに誤差をもつかがわかり、テイラーの定理（Taylor's theorem）から両方の誤差が $(b-a)^3$ のように小さくなることがわかる。厳密な値 $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ は、オイラー（Euler）によるバーゼル問題（Basel problem）の解である。大学の最初の解析学（analysis）の講義では、これをフーリエ級数（Fourier series）を用いて証明する。また、「極限における厳密な不等式」の議論も厳密に扱う。Abbott の *Understanding Analysis* は、級数の収束と凸関数の両方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。