解答例

STEP III 2004、第 2 問

純粋数学 • 漸近線と曲線の概形

STEP III 2004、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/04-s3-q2

鍵となる考え方

f(x) を、直線 $y = x - 4$ と補正項の和として書く。補正項は分子が完全平方式なので、ある 1 点で**二重に** 0 になる。この二重の零点こそが、接する（tangency）ということの意味そのものである。f$(x) = 0$ の根を求めるには分母を払えばよい。すると二乗の差（difference of two squares）が現れ、ただちに因数分解できる。

解答

以下では一貫して

$$\mathrm{f}(x) = (x-4) - \frac{16(2x+1)^2}{x^2(x-4)}.$$

と書く。

小問 (i)

分母は $x = 0$ と $x = 4$ で 0 になる。分子 $16(2x+1)^2$ はそのどちらでも 0 でないので、鉛直漸近線（vertical asymptote）は

$$x = 0 \qquad \text{および} \qquad x = 4.$$

である。$|x|$ が大きいとき、この分数は分子が 2 次式、分母が 3 次式である：

$$\frac{16(2x+1)^2}{x^2(x-4)} = \frac{64x^2+64x+16}{x^3-4x^2} \approx \frac{64}{x} \to 0 \quad \text{ただし} x \to \pm\infty,$$

したがって f$(x) - (x-4) \to 0$ であり、斜めの漸近線（oblique asymptote）は

$$y = x - 4.$$

である。

考えてみよう 漸近線が同時に接線にもなりうるのはなぜだろうか。

漸近線は遠方でのふるまいを記述するにすぎないので、その直線が有限のある点で曲線に接することを妨げるものは何もない。直線と曲線の交点を求めるために $\mathrm{f}(x) = x - 4$ とおく：

$$\mathrm{f}(x) - (x-4) = -\frac{16(2x+1)^2}{x^2(x-4)} = 0 \iff x = -\tfrac{1}{2}.$$

因数 $(2x+1)$ が二乗されているので、$x = -\frac{1}{2}$ は $\mathrm{f}(x) - (x-4) = 0$ の**重解**（double root）である。これは、直線がそこで曲線に接することを意味する。直接確かめるために、$h(x) = -16/(x^2(x-4))$ として $D(x) = \mathrm{f}(x) - (x-4) = (2x+1)^2 h(x)$ とおく。関数 h は $x = -\frac{1}{2}$ の近くで微分可能なので

$$D'(x) = 4(2x+1)h(x) + (2x+1)^2 h'(x),$$

であり、これは $x = -\frac{1}{2}$ で 0 となる。よって $\mathrm{f}'(-\frac{1}{2}) = 1$ であり、これは漸近線の傾きに等しい。また $\mathrm{f}(-\frac{1}{2}) = -\frac{9}{2}$ であり、この点は $y = x - 4$ 上にある。以上より、斜めの漸近線は点 $(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2})$ における曲線の接線（tangent）である。

小問 (ii)

すべてを共通の分母 $x^2(x-4)$ でまとめる：

$$\mathrm{f}(x) = \frac{x^2(x-4)^2 - 16(2x+1)^2}{x^2(x-4)} = \frac{[x(x-4)]^2 - [4(2x+1)]^2}{x^2(x-4)}.$$

分子は二乗の差である：

$$\begin{aligned}[x^2 - 4x - 4(2x+1)][x^2 - 4x + 4(2x+1)] &= (x^2 - 12x - 4)(x^2 + 4x + 4) \\ &= (x^2 - 12x - 4)(x+2)^2.\end{aligned}$$

したがって

$$\mathrm{f}(x) = \frac{(x+2)^2(x^2 - 12x - 4)}{x^2(x-4)}.$$

因数 $(x+2)^2$ から、$x = -2$ が $\mathrm{f}(x) = 0$ の重解であることがわかる。また $x = -2$ は分母の零点ではないので、条件を満たしている。残りの 2 つの根は $x^2 - 12x - 4 = 0$ から得られる：

$$x = 6 \pm 2\sqrt{10} \approx 12.32,\ -0.32.$$

小問 (iii)

グラフの概形を描くのに必要な特徴をまとめる。

$x=0$ の近く。 $x\to 0$ のとき $\mathrm{f}(x)\approx -\dfrac{16}{x^2\cdot(-4)}=\dfrac{4}{x^2}$ なので、**両側から** $\mathrm{f}(x)\to+\infty$ となる。

$x=4$ の近く。 $x\to 4$ のとき $\mathrm{f}(x)\approx -\dfrac{16\cdot 81}{16(x-4)}=-\dfrac{81}{x-4}$ である。よって $x\to 4^-$ のとき $\mathrm{f}(x)\to+\infty$、$x\to 4^+$ のとき $\mathrm{f}(x)\to-\infty$ となる。

斜めの漸近線のどちら側にあるか。 $\mathrm{f}(x)-(x-4)=-16(2x+1)^2/(x^2(x-4))$ である。これは $x<4$ では（$x=0$ と $x=-\frac{1}{2}$ を除いて）正、$x>4$ では負である。したがって曲線は、$x=4$ の左側では $y=x-4$ より上にあって $x=-\frac{1}{2}$ でのみこれに接し、右側では下にある。

f の符号。 因数分解した形において、因数 $(x+2)^2$ と x^2 は決して負にならない。よって f の符号は $(x^2-12x-4)/(x-4)$ の符号に一致する：

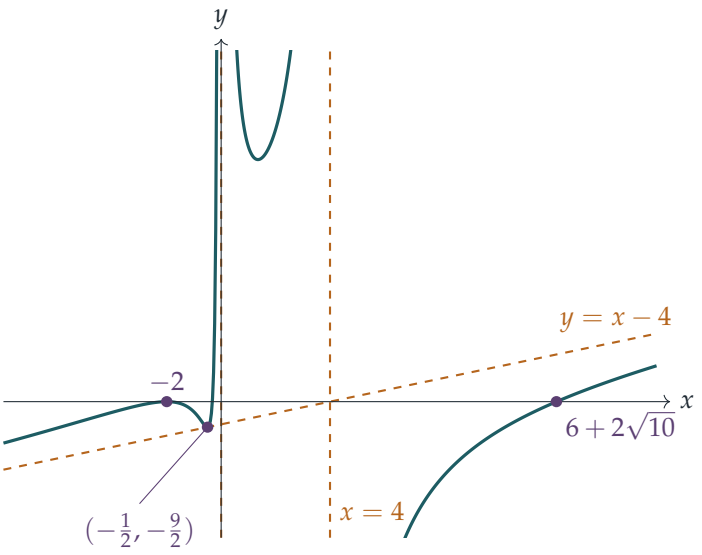
- $x<6-2\sqrt{10}$ のとき（ただし $\mathrm{f}(-2)=0$ を除く）および $4<x<6+2\sqrt{10}$ のとき $\mathrm{f}<0$；
- $6-2\sqrt{10}<x<4$ のとき（$x\neq 0$）および $x>6+2\sqrt{10}$ のとき $\mathrm{f}>0$。

曲線は $x=-2$ の両側で負のままであり、そこで x 軸に接するので、$(-2,0)$ は極大点（local maximum）である。

極値点。 極値点（turning point）は STEP の概形図には必要ないが、求めておくとより正確な図になる。微分すると

$$\mathrm{f}'(x)=1+\frac{16(2x+1)(2x^2+3x-8)}{x^3(x-4)^2}.$$

を得る。区間 $(-2,\,6-2\sqrt{10})$ では、曲線は高さ 0 から始まって高さ 0 で終わり、その間では負なので、そこに極小点をもつ。数値的には、この極小点はおよそ $(-0.51,\,-4.50)$ にあり、接点のすぐ左である。区間 $(0,4)$ では、曲線は両端で $+\infty$ に発散するので、ここにも極小点がありおよそ $(1.35,\,42.7)$ にある。$\mathrm{f}'(x)=0$ の分母を払うと $(x+2)(x^4-10x^3+100x^2-72x-64)=0$ となる。この 4 次式はちょうどこの 2 つの実数解をもつので、ほかに極値点はない。特に、f は $x>4$ 全体で増加する。



この図は縮尺どおりに描かれているため、$x = -2$ と $x \approx -0.32$ の間のくぼみは浅く見える。そこでの最低点は軸からおよそ 4.5 下にあるにすぎず、曲線は $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ で漸近線に接している。

検算

- $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{9}{2} - 0 = -\frac{9}{2}$ であり、これは $y = x - 4$ 上にある。$x = -\frac{1}{2}$ における数値微分の値は 1.000 となる。
- $(x+2)^2(x^2 - 12x - 4)$ を展開して $x^2(x-4)^2 - 16(2x+1)^2$ と比べると、どちらも $x^4 - 8x^3 - 48x^2 - 64x - 16$ となる。
- $f(1000) - (1000 - 4) \approx -0.064 \approx -64/1000$ であり、$64/x$ による見積もりのとおりである。

よくある間違い

- x^2 があるために、$x = 0$ の近くで曲線が**両側で** $+\infty$ に発散することを見落とす。2 本の鉛直漸近線はふるまいが異なる。
- 直線が曲線と交わることだけを示して、接することを証明したつもりになる。傾きが一致すること、あるいは同値なこととして重解であることも示す必要がある。
- 小問 (ii) で二乗の差に気づかず、4 次の分子を展開してから根を見つけようとする。

STEP のその先へ

直線が曲線と「重解」で交わるのは、ちょうど接するときである。これは**交点の重複度**（multiplicity of intersection）という考え方であり、代数幾何学（algebraic geometry）の基礎をなし、2 つの曲線が何回交わるかについてのベズー（Bézout）の定理などの結果につながる。有理関数（rational function）は無限遠ではその多項式部分で近似され、剰余の大きさ（ここでは $64/x$）は曲線がどれだけ速く漸近線に近づくかを教えてくれる。これは漸近展開（asymptotic expansion）への最初の入り口である。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、この種のグラフの概形を描く問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。