解答例

STEP III 2004、第 13 問

確率・統計 ・ 幾何分布

STEP III 2004、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/04-s3-q13

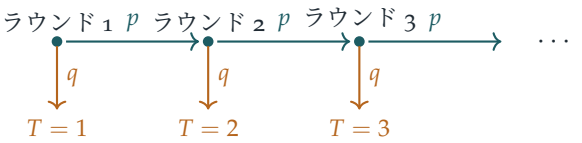
鍵となる考え方

競技全体のことはいったん忘れて、1 人の競技者だけを追ってみる。その競技者が脱落するラウンドは幾何分布に従う確率変数（geometric random variable）であり、3 人の競技者の脱落ラウンドは互いに独立（independent）である。すると、どの小問も 3 つの独立な幾何分布の確率変数に関する問題になる。大賞が授与されるかどうかは、**最も遅い**脱落ラウンドが重なっているかどうかだけで決まることがわかる。したがって最後の小問は、最初の 2 つの小問をあわせた事象の余事象（complement）になる。

解答

$q = 1 - p$ とおき、$0 < p < 1$ と仮定する。競技者 j $(j = 1, 2, 3)$ について、その競技者が失敗するラウンドを T_j とする。ラウンド k で失敗するのは、ラウンド $1, \ldots, k-1$ を通過し、そのうえでラウンド k で失敗するときであり、そのときに限るから、

$$\mathrm{P}(T_j = k) = p^{k-1}q, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$



各ラウンドの通過・失敗は独立に決まり、競技者どうしも独立に行動するので、T_1, T_2, T_3 は独立である。また、次のことにも注意しておく。

$$\mathrm{P}(T_j \leq r-1) = 1 - \mathrm{P}(\text{ラウンドを通過} 1, \ldots, r-1) = 1 - p^{r-1}.$$

小問 (i)

独立性より、3 人全員がラウンド k で脱落する確率は $(p^{k-1}q)^3$ である。これを k について和をとると、公比 $p^3 < 1$ の等比級数（geometric series）となり、

$$\mathrm{P}(T_1 = T_2 = T_3) = \sum_{k=1}^{\infty} q^3 p^{3(k-1)} = \frac{q^3}{1-p^3} = \frac{(1-p)^2}{1+p+p^2}.$$

小問 (ii)

先に脱落する競技者の選び方は 3 通りある。選び方を 1 つ固定すると、残りの 2 人がともにラウンド r で失敗する確率は $(p^{r-1}q)^2$ であり、先に脱落する 1 人が r より前のいずれかのラウンドで失敗する確率は $1 - p^{r-1}$ である。選び方が異なればこれらの事象は互いに排反（disjoint）であるから、

$$\mathrm{P}(\text{2 人がラウンド}r\text{, 残りはそれ以前}) = 3p^{2r-2}q^2\left(1 - p^{r-1}\right).$$

小問 (iii)

考えてみよう 大賞が授与されるのは、T_1, T_2, T_3 を用いて言えば、正確にはどのようなときか。

T_j の最大値（maximum）をとる競技者がただ 1 人であるとし、たとえば $T_3 > T_1, T_2$ として、$m = \max(T_1, T_2)$ とおく。ラウンド m の時点で競技者 3 はまだ残っており、このラウンドを通過する。そのラウンドに残っている他の競技者はみな $T_j = m$ であるから、このラウンドで失敗する。よって競技者 3 はラウンド m で賞を獲得する。

逆に、最大値が共有されているとし、たとえば $T_2 = T_3 = M \geq T_1$ とする。ラウンド M より前では、2 と 3 はともに残っていて、どちらも各ラウンドを通過するので、生き残りがただ 1 人になるラウンドは存在しない。ラウンド M では残っている全員が失敗するので、生き残りは 1 人もいない。よって賞は授与されない。

したがって、賞が**授与されない**のは、上位 2 つの脱落ラウンドが等しいとき、かつそのときに限る。すなわち、3 つすべてが等しい場合（小問 (i)）か、2 つがあるラウンド r で等しく、残りの 1 つがそれより前である場合である。後者の場合は $r \geq 2$ が必要であり、これは小問 (ii) の事象である。小問 (ii) の結果を $r \geq 2$ について足し合わせ、

$s = r-1$ とおくと、

$$\sum_{r=2}^{\infty} 3q^2p^{2r-2}\left(1-p^{r-1}\right) = 3q^2\sum_{s=1}^{\infty}\left(p^{2s}-p^{3s}\right) = 3q^2\left(\frac{p^2}{1-p^2}-\frac{p^3}{1-p^3}\right)$$
$$= 3q^2\,\frac{p^2(1-p^3)-p^3(1-p^2)}{(1-p^2)(1-p^3)} = 3q^2\,\frac{p^2(1-p)}{(1-p^2)(1-p^3)}$$
$$= \frac{3p^2q^2}{(1+p)(1-p^3)}.$$

これに小問 (i) の結果を加え、$1-p^3 = q(1+p+p^2)$ を用いると、

$$\mathrm{P}(\text{賞なし}) = \frac{q^3(1+p)+3p^2q^2}{(1+p)(1-p^3)} = \frac{q^2(1+2p^2)}{(1+p)(1-p^3)} = \frac{(1-p)(1+2p^2)}{(1+p)(1+p+p^2)}.$$

$(1+p)(1+p+p^2) = 1+2p+2p^2+p^3$、$(1-p)(1+2p^2) = 1-p+2p^2-2p^3$ であるから、その差は $3p+3p^3$ である。したがって

$$\mathrm{P}(\text{大賞が授与される}) = \frac{3p(1+p^2)}{(1+p)(1+p+p^2)}.$$

検算

- $p \to 0$ のとき全員がラウンド 1 で失敗し、(iii) の答えは 0 に近づく。$p \to 1$ のとき同着は起こりにくくなり、答えは $\frac{3\cdot2}{2\cdot3} = 1$ に近づく。
- 直接考えると、賞が授与されるのは 1 つの T_j が他の 2 つより大きいときであるから、その確率は $3\sum_k p^{k-1}q\,(1-p^{k-1})^2$ である。$p = \frac{1}{2}$ として厳密に和を計算すると $\frac{5}{7} \approx 0.714$ となり、$\frac{3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{4}} = \frac{5}{7}$ と一致する。
- 競技そのもののシミュレーション（simulation）（$p = 0.6$ で 2×10^5 回試行）では、77.9% の試行で賞が授与された。公式の値は 0.7806 である。

よくある間違い

- 小問 (ii) で、どの競技者が先に脱落するかの選び方を表す因子 3 を掛け忘れる。
- 賞が授与されるには、最後の 2 人が異なるラウンドで脱落する必要があると考えてしまう。2 人がラウンド m で同時に脱落し、3 人目がそのラウンドを通過すれば、3 人目はやはり賞を獲得する。賞を妨げるのは**最上位**での同着だけである。

STEP のその先へ

この問題は、独立な幾何分布の確率変数の最大値と、それがただ 1 つに定まるかどうかに関するものである。競技者が n 人のとき、最上位で同着が起こる確率は $n \to \infty$ としても極限に収束（converge）しない。この確率は $\log n$ に応じてごくわずかに振動するのであり、これはリーダー選挙（leader election）などのアルゴリズムの解析（analysis of algorithms）でよく知られた意外な事実である。ここで用いた手法、すなわち 1 つの変数で条件付け（conditioning）を行うことと等比級数の和をとることは、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）で詳しく扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。