解答例

STEP III 2004、第 11 問

力学 ・ 2 物体の反発

> **STEP III 2004、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s3-q11

この問題は、*Beyond STEP* の第 10.6 節「二体が一体になる」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch10/two-body.html

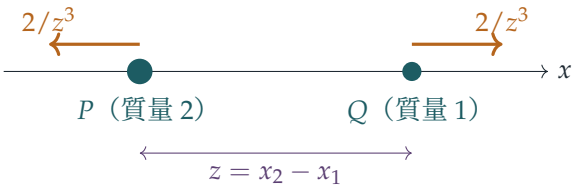
鍵となる考え方

互いに押し合う 2 つの粒子からは 2 本の運動方程式（equations of motion）が得られ、それらをうまく 2 通りに組み合わせることですべてが片づく。差 $x_2 - x_1$ をとると間隔 z についての 1 本の方程式が得られ、これは $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}z$ の技法によって一度積分できる（実はこれはエネルギー保存（energy conservation）にほかならない）。重み付きの和 $2x_1 + x_2$ は重心（centre of mass）の 3 倍であり、力は内力（internal forces）であるから、これには正味の力がまったくはたらかない。

解答

z の方程式

P と Q を直線上の質点としてモデル化し、x は P から Q に向かう向きに増加するものとする（$x_2 > x_1$ だからである）。斥力は P を負の向きに、Q を正の向きに押し、その大きさはどちらも $2/z^3$ である。



各粒子についてニュートン（Newton）の運動の第 2 法則を用いると

$$2\ddot{x}_1 = -\frac{2}{z^3}, \qquad \ddot{x}_2 = \frac{2}{z^3}.$$

よって $\ddot{x}_1 = -1/z^3$ であり、引き算すると

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{z^3},$$

となり、求める式が得られる。

z を求める

まず初期条件を確認する。$t = 0$ で $z = 1$ である。P は Q に向かって、すなわち正の向きに動くので $\dot{x}_1 = 1$、一方 $\dot{x}_2 = 0$ である。したがって $t = 0$ で $v = \dot{z} = 0 - 1 = -1$ であり、間隔は縮まりつつある。

$\ddot{z} = v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}z$ とおくと、方程式は

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = \frac{3}{z^3} \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{1}{2}v^2 = -\frac{3}{2z^2} + C.$$

となる。$z = 1$ で $v^2 = 1$ であるから $\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + C$、よって $C = 2$ である。したがって

$$v^2 = 4 - \frac{3}{z^2}, \qquad \text{すなわち} \qquad z^2\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 4z^2 - 3.$$

左辺は $\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(z^2)/\mathrm{d}t\right)^2$ であり、これは $u = \sqrt{4z^2 - 3} \geq 0$ とおくことを示唆している。すると $u^2 = 4z^2 - 3$ より $u\,\dot{u} = 4z\dot{z}$ であり、上の方程式は $(z\dot{z})^2 = u^2$、すなわち $z\dot{z} = \pm u$ を意味する。よって

$$\dot{u} = \frac{4z\dot{z}}{u} = \pm 4.$$

初めは $u = 1$ かつ $z\dot{z} = -1 < 0$ であるから、負号をとって $u = 1 - 4t$ となる。

考えてみよう u が 0 に達すると何が起こるか。$\dot{z}$ の符号は負のままか。

負のままではない。$t = \frac{1}{4}$ で $u = 0$ となるので、$z = \sqrt{3}/2$、$v = 0$ であり、粒子はこの瞬間に最も接近している。そこでは $\ddot{z} = 3/z^3 > 0$ なので z は増加に転じ、$\dot{z}$ は正になって正号の側に移る。こうして $t \geq \frac{1}{4}$ では $u = 4t - 1$ となる（$t = \frac{1}{4}$ で連続である）。どちらの場合も $u^2 = (4t-1)^2$ であるから、すべての $t \geq 0$ に対して

$$4z^2 - 3 = 16t^2 - 8t + 1 \quad \Longrightarrow \quad z^2 = 4t^2 - 2t + 1,$$

であり、$z > 0$ より

$$z = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}.$$

これが求める結果である。($4t^2 - 2t + 1 = 4(t - \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{4} > 0$ であるから、平方根はつねに定義されることに注意する。)

x_1 と x_2 を求める

2 本の運動方程式から

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(2x_1 + x_2) = 2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^3} = 0.$$

これは運動量保存 (conservation of momentum) であり、2 つの力は大きさが等しく向きが逆である。したがって $2x_1 + x_2$ は t の 1 次式である。$t = 0$ でその値は $2 \cdot 0 + 1 = 1$、変化率は $2\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 2 \cdot 1 + 0 = 2$ である。よって

$$2x_1 + x_2 = 2t + 1, \qquad x_2 - x_1 = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}.$$

第 1 式から第 2 式を引くと $3x_1$ が得られ、第 1 式に第 2 式の 2 倍を足すと $3x_2$ が得られる:

$$x_1 = \frac{2t + 1 - \sqrt{4t^2 - 2t + 1}}{3}, \qquad x_2 = \frac{2t + 1 + 2\sqrt{4t^2 - 2t + 1}}{3}.$$

検算

- $t = 0$ ではこれらは $x_1 = 0$、$x_2 = 1$ を与える。微分すると $\dot{x}_1(0) = \frac{1}{3}\big(2 - \frac{1}{2} \cdot (-2)\big) = 1$、$\dot{x}_2(0) = \frac{1}{3}(2 - 2) = 0$ となり、条件どおりである。
- z へのより速い道筋:$w = z^2$ とおくと $\ddot{w} = 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = 2\big(4 - 3/z^2\big) + 6/z^2 = 8$ であるから、$w(0) = 1$ と $\dot{w}(0) = 2z\dot{z} = -2$ より $w = 4t^2 - 2t + 1$ となる。この方法なら符号の心配をまったくせずに済む。
- $t \to \infty$ のとき $z \approx 2t - \frac{1}{2}$ であるから、$x_1 \to \frac{1}{2}$、$\dot{x}_2 \to 2$ となる。つまり P は最終的に静止し、Q が運動量のすべて ($1 \times 2 = 2 \times 1$) とエネルギーのすべてを担う。ポテンシャルエネルギー (potential energy) は $1/z^2$ であるから、初めのエネルギーは $1 + 1 = 2$、最後のエネルギーは $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2 = 2$ である。
- もとの方程式を数値的に (ルンゲ=クッタ法 (Runge–Kutta)、刻み幅 10^{-4}) $t = 5$ まで解くと、x_1、x_2、z の式と 10^{-11} 以内で一致し、最接近距離は $z = 0.8660\ldots = \sqrt{3}/2$ となる。

よくある間違い

- $\dot{z}(0) = +1$ としてしまう。P は Q に向かって動いているので、間隔は縮まっている。
- すべての時刻で $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t = -\sqrt{4 - 3/z^2}$ と書き、$t = \frac{1}{4}$ での折り返し点を見落とす。
- P の方程式で質量 2 を忘れ、$\ddot{z} = 4/z^3$ としてしまう。

STEP のその先へ

これは二体問題（two-body problem）の縮図である。重心は等速で運動し、相対座標は**換算質量**（reduced mass）$m_1 m_2/(m_1 + m_2) = \frac{2}{3}$ をもつ 1 つの粒子が同じ力を受けるかのようにふるまう。実際 $\frac{2}{3}\ddot{z} = 2/z^3$ である。同じ分解によって、惑星の運動は 1 つの軌道の問題に帰着される。逆 3 乗の力（inverse-cube force）もまた特別である。z^2 がちょうど t の 2 次式になるのは、共形力学（conformal mechanics）で研究される $1/z^2$ ポテンシャルの隠れた対称性によるものである。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、換算質量と二体運動を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。