解答例

STEP III 2004、第 10 問

力学 ・ 弾性ひもと単振動

STEP III 2004、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

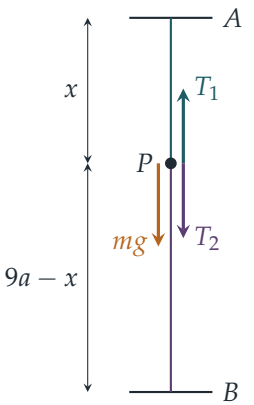
step.maths.org/questions/04-s3-q10

鍵となる考え方

各糸がフックの法則（Hooke's law）に従うのはピンと張っている（taut）間だけなので、運動はどの糸が張っているかによっていくつかの段階に分かれる。各段階で加速度は $7a - x$ の定数倍となるので、粒子は $x = 7a$ を中心とする単振動（simple harmonic motion）を行うが、ω は段階ごとに異なる。第 1 段階の終わりの時刻と速さを求め、それを用いて第 2 段階を始める。

解答

P を質点とみなし、糸は軽く、伸びているときはフックの法則に従い、たるんでいる（slack）ときは力を及ぼさないものとしてモデル化する。A から下向きに測った $x = AP$ をとると $PB = 9a - x$ であり、下向きを正とする。



運動方程式

$x > 6a$ のとき糸 AP は $x - 6a$ だけ伸びているので、P を上向きに引くその張力は

$$T_1 = \frac{6mg(x-6a)}{6a} = \frac{mg(x-6a)}{a}.$$

である。$x < 7a$ のとき糸 BP は $(9a - x) - 2a = 7a - x$ だけ伸びているので、P を下向きに B の方へ引くその張力は

$$T_2 = \frac{6mg(7a-x)}{2a} = \frac{3mg(7a-x)}{a},$$

であり、BP がたるむ $x \geq 7a$ では $T_2 = 0$ である。

$6a < x < 7a$ のとき、両方の糸が張っており、下向きにニュートン（Newton）の第二法則を適用すると

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg - \frac{mg(x-6a)}{a} + \frac{3mg(7a-x)}{a} \\ &= \frac{mg}{a}(a - x + 6a + 21a - 3x) = \frac{mg}{a}(28a - 4x), \end{aligned}$$

となるので、題意のとおり $\ddot{x} = \dfrac{4g}{a}(7a - x)$ である。

$7a < x < 9a$ のとき、張っているのは AP だけなので

$$m\ddot{x} = mg - \frac{mg(x-6a)}{a} = \frac{mg}{a}(7a - x),$$

となり、題意のとおり $\ddot{x} = \dfrac{g}{a}(7a - x)$ を得る。

B に到達するまでの時間

第 1 段階：$6a \leq x \leq 7a$。$y = x - 7a$ とおく。すると $\omega_1^2 = 4g/a$ として $\ddot{y} = -\omega_1^2 y$ となり、これは $x = 7a$ を中心とする単振動である。$y = -a$ で静止した状態から始めると

$$x = 7a - a\cos\omega_1 t, \qquad \dot{x} = a\omega_1 \sin\omega_1 t.$$

を得る。$x = 6a$ で静止した状態から出発すると、粒子は下向きに加速する（そこでは $\ddot{x} > 0$ だからである）。よって x は $6a$ から増加し、$x = 7a$ となるまでこの段階にとどまる。これが起こるのは $\cos\omega_1 t = 0$ のときであり、最初は $\omega_1 t = \pi/2$ のときである。したがって要する時間は

$$t_1 = \frac{\pi}{2\omega_1} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{a}{g}},$$

であり、このとき粒子は速さ $a\omega_1 = 2\sqrt{ag}$ で下向きに運動している。

考えてみよう $x = 7a$ で方程式が変わる。この先どう進めればよいだろうか？

位置と速度は $x = 7a$ で連続なので、第 1 段階の終わりの状態が第 2 段階の初期条件となる。そこで時計をリセットする。

第 2 段階：$7a \le x \le 9a$。今度は $\omega_2^2 = g/a$ として $\ddot{y} = -\omega_2^2 y$ であり、中心 $y = 0$ から速さ $2\sqrt{ag}$ で出発する。よって、$x = 7a$ となってからの時間を τ とすると

$$x = 7a + \frac{2\sqrt{ag}}{\omega_2}\sin\omega_2\tau = 7a + 2a\sin\omega_2\tau.$$

である。振幅（amplitude）はちょうど $2a$ なので、粒子が点 B である $x = 9a$ に到達するのは $\sin\omega_2\tau = 1$ のときであり、最初は $\omega_2\tau = \pi/2$ のときである。その瞬間 $\dot{x} = 2\sqrt{ag}\cos\omega_2\tau = 0$ なので、粒子は速さゼロで B に到着する。この段階に要する時間は

$$t_2 = \frac{\pi}{2\omega_2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

である。

したがって、粒子が B に到達するまでの時間は

$$t_1 + t_2 = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{a}{g}} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} = \frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

である。

検算

エネルギーを考えると、P がちょうど静止した状態で B に到達することが確かめられる。BP が a だけ伸びている出発時と、AP が $3a$ だけ伸びている B への到着時を比べる。弾性エネルギー（elastic energy）は $\frac{6mg\,a^2}{2\cdot 2a} = \frac{3}{2}mga$ から $\frac{6mg\,(3a)^2}{2\cdot 6a} = \frac{9}{2}mga$ へと変化する。増加分は $3mga$ であり、これは $3a$ 落下する間に失われる重力による位置エネルギーにちょうど等しいので、B での運動エネルギーはゼロである。数値的には、$a = 0.7$、$g = 9.8$ として、$x = 6a$ で静止した状態から完全な運動方程式を数値的に解き進めると、$t \approx 0.2099$ で $x = 7a$ となり、$t \approx 0.6297$ で最下点 $x = 9a$ に達する。一方 $\frac{3\pi}{4}\sqrt{a/g} = 0.6297$ である。

よくある間違い

- $x > 7a$ でも T_2 を用いてしまう。糸は押すことができないので、BP が $2a$ より短くなれば力を及ぼさない。
- 運動全体で ω_1 を用いてしまう。あるいは、第 2 段階の単振動を、第 1 段階から引き継いだ速さ $2\sqrt{ag}$ で始め直すのを忘れる。

- 振幅 $2a$ によって P が本当に B まで達することを確かめずに、第 2 段階を 4 分の 1 周期（period）とみなしてしまう。

STEP のその先へ

これは区分線形振動子（piecewise-linear oscillator）である。復元力は線形だが、ばね定数（剛性）が $x = 7a$ で変化する。それぞれの側が独自の位相平面（phase plane）上の楕円をもち、軌道は糸がたるむ点でつながった 2 つの異なる楕円の弧から成る。跳ねるボールから衝突振動子に至るまで、このような系は非線形力学（nonlinear dynamics）の標準的な出発点である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、振動とエネルギーを用いた解法を詳しく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。