解答例

STEP III 2004、第 1 問

純粋数学 ・ 双曲線関数の積分

STEP III 2004、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/04-s3-q1

鍵となる考え方

どちらの被積分関数（integrand）も、双曲線関数（hyperbolic function）と、もう一方の双曲線関数から作られた式との積になっている。そして $\sinh x\,\mathrm{d}x$ と $\cosh x\,\mathrm{d}x$ は、それぞれちょうど $\cosh x$ と $\sinh x$ の微分（differential）である。したがって置換（substitution）$c = \cosh x$ および $s = \sinh x$ によって、これらは有理関数の積分（rational integral）に帰着する。一方は部分分数分解（partial fractions）を、もう一方は逆正接関数（arctangent）を必要とする。「これを用いて」（hence）の部分で決定的なのは、$2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x$ であるから、二つの分母が同じ関数だという観察である。

解答

一つ目の積分

$c = \cosh x$ とおくと $\mathrm{d}c = \sinh x\,\mathrm{d}x$ であり、積分区間の端 $x = 0$ と $x = a$ はそれぞれ $c = 1$ と $c = \cosh a$ になる。よって

$$\int_0^a \frac{\sinh x}{2\cosh^2 x - 1}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\cosh a} \frac{\mathrm{d}c}{2c^2 - 1}.$$

分母は $(\sqrt{2}\,c - 1)(\sqrt{2}\,c + 1)$ と因数分解でき、

$$\frac{1}{(\sqrt{2}\,c - 1)(\sqrt{2}\,c + 1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,c - 1} - \frac{1}{\sqrt{2}\,c + 1}\right),$$

となる。これは通分して確かめられる。分子は $\frac{1}{2}((\sqrt{2}c + 1) - (\sqrt{2}c - 1)) = 1$ である。各項を積分すると対数になり、合成関数の微分法（chain rule）から余分な因子 $1/\sqrt{2}$

がつく。$c \geq 1$ では $\sqrt{2}c \pm 1$ はどちらも正なので、絶対値記号（modulus signs）は不要である：

$$\begin{aligned}\int_1^{\cosh a} \frac{\mathrm{d}c}{2c^2-1} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[\ln(\sqrt{2}\,c-1) - \ln(\sqrt{2}\,c+1)\Big]_1^{\cosh a} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}\cosh a - 1}{\sqrt{2}\cosh a + 1}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right).\end{aligned}$$

$-\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ であるから、これはまさに求める結果である。

二つ目の積分

次に $s = \sinh x$ とおくと $\mathrm{d}s = \cosh x\,\mathrm{d}x$ であり、積分区間の端は $s = 0$ と $s = \sinh a$ になる：

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{\cosh x}{1+2\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sinh a} \frac{\mathrm{d}s}{1+(\sqrt{2}\,s)^2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\arctan(\sqrt{2}\,s)\Big]_0^{\sinh a} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\sinh a).\end{aligned}$$

広義積分

考えてみよう 二つの被積分関数の分母は見かけが異なる。どうすれば引き算できるだろうか。

$\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$ を用いると

$$2\cosh^2 x - 1 = 2 + 2\sinh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x,$$

となるので、二つの分母は一致し、

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{\cosh x - \sinh x}{1+2\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\sinh a) &- \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}\cosh a - 1}{\sqrt{2}\cosh a + 1}\right) \\ &- \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right).\end{aligned}$$

ここで $a \to \infty$ とする。$\sinh a \to \infty$ であるから $\arctan(\sqrt{2}\sinh a) \to \frac{\pi}{2}$ である。また $\cosh a \to \infty$ であるから

$$\frac{\sqrt{2}\cosh a - 1}{\sqrt{2}\cosh a + 1} = \frac{1 - 1/(\sqrt{2}\cosh a)}{1 + 1/(\sqrt{2}\cosh a)} \to 1,$$

となり、ln の 1 における連続性（continuity）より、その対数は 0 に近づく。三つの項はすべて有限の極限をもつので、広義積分（infinite integral）は収束（converge）し、

$$\int_0^\infty \frac{\cosh x - \sinh x}{1+2\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right),$$

となって、求める結果が得られる。

最後の積分

> **考えてみよう** $\cosh x - \sinh x$ と $1 + 2\sinh^2 x$ は、e^x を用いて表すとどうなるだろうか。

$u = e^x$ とおくと $\cosh x - \sinh x = e^{-x} = 1/u$ であり、倍角公式（double-angle formula）を用いると

$$1 + 2\sinh^2 x = \cosh 2x = \frac{u^2 + u^{-2}}{2} = \frac{u^4 + 1}{2u^2}.$$

また $\mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x$ より $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/u$ であり、積分区間の端 $x = 0$、$x \to \infty$ は $u = 1$、$u \to \infty$ になる。したがって

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\cosh x - \sinh x}{1 + 2\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^\infty \frac{1}{u} \cdot \frac{2u^2}{1 + u^4} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{u} \\ &= 2\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^4}.\end{aligned}$$

前の結果を半分にすると

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^4} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}\right).$$

これは整理できる。$\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = (\sqrt{2}+1)^2$ であるから、対数は $2\ln(1+\sqrt{2})$ となり、

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^4} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} \approx 0.2437.$$

検算

- $a = 0$ のとき、一つ目の公式は $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = 0$ を与える。長さ 0 の区間上の積分としては当然の値である。
- 最終的な答えは正であり、$\int_1^\infty u^{-4}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}$ より小さい。$1 + u^4 > u^4$ であるから、これは妥当である。
- $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}$ にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると（$u = 1/t$ とおくと $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ になる）、0.243748 が得られ、公式と小数第 12 位まで一致する。x に関する広義積分を数値的に確かめると 0.487495 となり、これのちょうど 2 倍である。

よくある間違い

- $\frac{1}{\sqrt{2}c \pm 1}$ や $\frac{1}{1+2s^2}$ を積分するときに出てくる因子 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ を忘れる。
- 置換するときに積分区間の端を変えない、あるいは答えを c や s で表したままにしてしまう。
- 最後の部分で $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/u$ を忘れる。すると $2u/(1+u^4)$ となり、発散（divergent）する積分になってしまう。

STEP のその先へ

最終結果は、ある古典的な結果の一部である。$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ であり、置換 $u \mapsto 1/u$ によって $[0,1]$ 上と $[1,\infty)$ 上の部分はそれぞれ $\int_0^1 \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ と $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ になることがわかる。これらの和と差は初等的（elementary）に求められる。大学 1 年の講義では、周回積分（contour integration）と留数（residue）を用いたより鮮やかな方法にも出会うだろう。この方法を使えば $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$ が一気に求まる。この考え方を学ぶには、Needham の *Visual Complex Analysis*（『ビジュアル複素解析』）がすばらしい入口である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。