解答例

STEP II 2004、第 9 問

力学 ・ 重心

> **STEP II 2004、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q9

鍵となる考え方

曲面を下にして置かれた半球（hemisphere）は、球面上の一点で平面に接している。球の法線（normal）は常に球の中心を通る。したがって垂直抗力（reaction）は底面の中心 O を通る鉛直線に沿ってはたらき、釣り合い（equilibrium）の状態では、そこに置かれている物体全体の重心（centre of gravity）も同じ鉛直線上になければならない。すると問題の各小問は、どれも「重心を求め、それが O の真下に来るまで傾ける」というだけのことになる。物体に固定した座標を用いれば、これは容易である。

解答

モデルと釣り合いの条件

半球を、水平面とただ一点 C で接する剛体（rigid body）とみなし、質点（particle）を縁に固定された点質量とみなす。はたらく力は重力と C における接触力（contact force）だけである。C は球面上にあるから、C における法線は O を通り、平面は水平であるからこの法線は鉛直である。よって C は O の真下にあり、物体がどのように転がっても O の高さは r のままである。

釣り合いの状態では接触力が全重力と釣り合わなければならないので、接触力は鉛直であり（摩擦（friction）はない）、重力と同じ直線に沿ってはたらく。したがって次が成り立つ。

釣り合いの状態では、系の重心は O を通る鉛直線上にある。

物体は底面の曲面側を下にして置かれているので、重心は O より下にある。

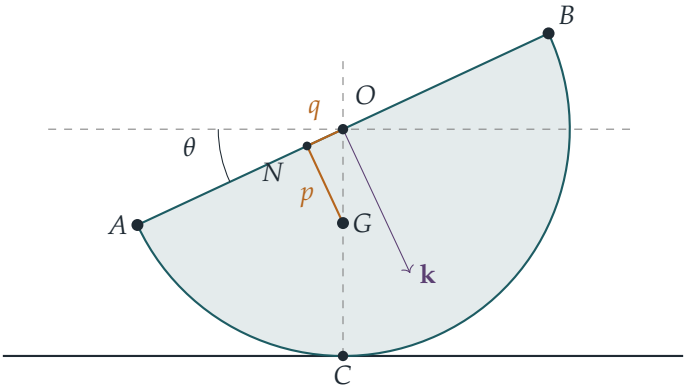
物体に固定した座標と初めの位置

物体に固定された、互いに垂直な二つの単位ベクトルをとる。$\mathbf{k}$ は対称軸（axis of symmetry）に沿って O から曲面の側へ向かうベクトル、$\mathbf{e}$ は底面内のベクトルとする。G は底面からの距離が p、O からの距離が $\sqrt{p^2+q^2}$ であるから、G から底面に下ろした垂線の足 N は O から距離 q の位置にある。$\mathbf{e}$ を O から N へ向かう向きにとると、

$$\overrightarrow{OG} = p\,\mathbf{k} + q\,\mathbf{e}.$$

となる。

底面は $\mathbf{k}$ に垂直であるから、底面が水平面となす角は、$\mathbf{k}$ が鉛直方向となす角に等しい。初めの位置では $\overrightarrow{OG}$ が鉛直下向きであるから、この角 θ は $\tan\theta = q/p$ を満たす。



縁のどの点が最も低いか。縁上の点の O からの位置は $r(\cos\phi\,\mathbf{e} + \sin\phi\,\mathbf{f})$ と表せる。ここで $\mathbf{f}$ は両者に垂直な第三の単位ベクトルである。この点の O からの深さは、下向きの単位ベクトル $(p\mathbf{k}+q\mathbf{e})/\sqrt{p^2+q^2}$ 方向の成分、すなわち

$$\frac{rq\cos\phi}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

であり、これは $\phi = 0$ のとき最大となる（$q > 0$ とする。$q = 0$ ならば底面は水平で、最も低い点はただ一つには定まらない）。よって

$$\overrightarrow{OA} = r\,\mathbf{e}, \qquad \overrightarrow{OB} = -r\,\mathbf{e}.$$

言葉で言えば、A は軸に関して G と同じ側、O と G を通る鉛直面内にあり、問題全体はこの平面内で完結する。

質点が点 A にある場合

半球と質点を合わせた重心 G_A は

$$(M+m)\,\overrightarrow{OG_A} = M(p\,\mathbf{k} + q\,\mathbf{e}) + mr\,\mathbf{e} = Mp\,\mathbf{k} + (Mq + mr)\,\mathbf{e}.$$

で与えられる。新しい釣り合いの位置では $\overrightarrow{OG_A}$ が鉛直であるから、θ の場合とまったく同様に、$\mathbf{k}$ と鉛直方向のなす角（これは底面と水平面のなす角である）は、$\overrightarrow{OG_A}$ と $\mathbf{k}$ のなす角に等しい。

$$\tan\alpha = \frac{Mq+mr}{Mp}, \qquad \text{よって} \qquad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{Mq+mr}{Mp}\right).$$

予想どおり、A に加わった重さが A をさらに引き下げ、$\alpha > \theta$ となる。

考えてみよう 底面の傾きの角が、$\overrightarrow{OG_A}$ と軸のなす角になるのはなぜか。

底面は軸 $\mathbf{k}$ に垂直であり、水平面は鉛直方向に垂直である。二直線の組をともに直角だけ回転させても、そのなす角は変わらないので、底面と水平面のなす角は $\mathbf{k}$ と鉛直方向のなす角に等しい。釣り合いの状態では O を通る鉛直線は直線 OG_A であり、その $\mathbf{k}$ 方向と $\mathbf{e}$ 方向の成分は（$M+m$ で割った後で）Mp と $Mq+mr$ である。この直線が $\mathbf{k}$ となす角の正接は、これらの比である。

質点が点 B にある場合

今度は質点が $-r\,\mathbf{e}$ にあるので、新しい重心 G_B は

$$(M+m)\,\overrightarrow{OG_B} = Mp\,\mathbf{k} + (Mq-mr)\,\mathbf{e}, \qquad \text{となり} \qquad \tan\beta = \frac{Mq-mr}{Mp}.$$

を満たす。m は小さいので $mr < Mq$ であり、$\overrightarrow{OG_B}$ は依然として軸に関して以前と同じ側にあり、底面は同じ向きに、より小さい角 β だけ傾く。

二つの位置のなす角

加法定理（compound-angle formula）により、

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\dfrac{2mr}{Mp}}{1+\dfrac{(Mq+mr)(Mq-mr)}{M^2p^2}}$$

$$= \frac{2mMrp}{M^2p^2+M^2q^2-m^2r^2} = \frac{2mMrp}{M^2\left(p^2+q^2\right)-m^2r^2},$$

となる。ここで三番目の段階では分子と分母に M^2p^2 を掛けた。これが求める結果である。

検算

- $q=0$ の場合（たとえば一様な半球）、二つの位置は互いに鏡像であり、$\tan\alpha = mr/(Mp)$、$\beta=-\alpha$ となる。このとき公式は $t=mr/(Mp)$ として $\tan 2\alpha = 2t/(1-t^2)$

を与え、これは 2 倍角の公式（double-angle formula）であって、当然そうなるべきものである。

- $m \to 0$ とすると、α と β はともに θ に近づき、右辺は 0 に近づく。
- $M = 1$、$m = 0.1$、$r = 1$、$p = \frac{3}{8}$、$q = \frac{1}{8}$ とすると $\tan\alpha = 0.6$、$\tan\beta = \frac{1}{15}$ となるので、$\alpha \approx 30.96°$、$\beta \approx 3.81°$ である。結果の両辺はともに $\frac{20}{39} \approx 0.5128$ に等しい。また、無作為に選んだ 2000 組の値について、重心の高さを最小化することで釣り合いの角を数値的に求めたところ、$\tan\alpha$ と $\tan\beta$ の公式と 10^{-13} 以内の精度で一致した。

よくある間違い

- G を、O の真下ではなく**初めの位置での接点**の真下に置いてしまう。接点は物体が転がるにつれて動く。常にその真上にあるのは O である。
- A を軸の反対側にとってしまう。縁の最も低い点は G と同じ側にあり、だからこそ A にある質点は傾きを**大きくする**のである。
- $mr > Mq$ のときにも β を正として扱ってしまう。このとき底面は逆向きに傾き、公式は β を負として数える場合にのみ成り立つ。m が小さいという条件は、この場合を除外するためのものである。

STEP のその先へ

ここで用いた原理は、重力とただ一つの接触力のもとで釣り合っている剛体の質量中心（centre of mass）は、その接触力の作用線上にある、というものである。言い換えれば、質量中心の高さは停留値をとっており、物体を転がしたときのその高さを調べれば、釣り合いが安定（stable）かどうかも判定できる。これは、大学 1 年の力学で揺れたり転がったりする物体について展開される、安定性のエネルギー法（energy method）の出発点である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このような考え方で質量中心と剛体の釣り合いを扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。