解答例

STEP II 2004、第 8 問

純粋数学 • 微分方程式の比較

STEP II 2004、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/04-s2-q8

鍵となる考え方

$0 \le x < 1$ である間は右辺が正なので、x は t とともに増加し、方程式を逆向きにみることができる。すなわち t は x の関数となり、0 から高さ x まで上るのにかかる時間を表す。どの高さでも傾き（gradient）が大きければ、どの高さにもより早く到達する。したがって、右辺どうしの間に与えられた不等式（inequality）から、3 つのグラフの上下関係がただちに決まる。そうすると、$x = 1$ まで上るのに有限の時間がかかるか無限の時間がかかるかは、広義積分（improper integral）が収束（converge）するかどうかという問題になる。

解答

以下、指数（exponent）が n のときの解を $x_n(t)$ と書く。$t = 0$ では $x = 0$ であり、どの n に対しても傾きは $(1-0)^{1/n} = 1$ である。したがって、すべての曲線は直線 $x = t$ に沿って原点から出発する。$0 \le x < 1$ である間は傾きが真に正なので x は増加し、

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{(1-x^n)^{1/n}}, \qquad \text{よって} \qquad t_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^n)^{1/n}}$$

は、$0 \le x < 1$ に対して、解が高さ x に達する時刻である。

小問 (i)

$n = 1$ のとき、方程式は $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 - x$ である。変数分離（separation of variables）すると（解に沿って $1 - x > 0$ なので問題ない）、

$$t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{1-\xi} = -\ln(1-x), \qquad \text{よって} \qquad x = 1 - \mathrm{e}^{-t}.$$

グラフは原点から傾き 1 で出発し、つねに増加し、上に凸（concave）であり（傾き e^{-t} は減少する）、$t \to \infty$ のとき漸近線（asymptote）$x = 1$ に近づくが、決して到達しない。実際、$x \to 1$ のとき $t_1(x) = -\ln(1-x) \to \infty$ である。下の図でいちばん下の曲線がこれを表している。

小問 (ii)

不等式。 $0 < x < 1$ のとき $1 - x$ と $(1-x^2)^{1/2}$ はともに正なので、この不等式は両辺を 2 乗して得られる不等式と同値である：

$$(1-x)^2 < 1 - x^2 \iff 1 - 2x + x^2 < 1 - x^2 \iff 2x^2 < 2x \iff x < 1,$$

ただし最後の段階では $2x > 0$ で割った。$x < 1$ は正しいので、$1 - x < (1-x^2)^{1/2}$ も成り立つ。

概形。 $(0,1)$ 内のすべての高さ x において、$n = 2$ の曲線は $n = 1$ の曲線より傾きが急である。したがって、$0 < x < 1$ に対して

$$t_2(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^2)^{1/2}} < \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{1-\xi} = t_1(x),$$

が成り立つ。左辺の被積分関数（integrand）は $(0, x]$ 上で真に小さいからである。よって $n = 2$ の解はどの高さにも真に早く到達し、どちらの解も増加するので、各時刻 $t > 0$（ただし $x_2 < 1$ である間）において $n = 2$ の曲線は $n = 1$ の曲線の真に上側にある。どちらも傾き 1 で原点を出発するので、原点の近くでは非常に近く、t が大きくなるにつれて離れていく。

> **考えてみよう** 2 つの曲線は原点で同じ傾きをもつ。なぜ $n = 1$ の曲線が後からこっそり上に出ることはできないのだろうか？

上に出るためには、ある高さ x で $n = 2$ の曲線に追いつく、すなわち同じ時刻に x に達する必要がある。しかし、すべての $x \in (0,1)$ に対して $t_2(x) < t_1(x)$ であり、遅いほうはつねに真に遅れて到達する。（同じことだが、2 つの曲線が同じ高さにあるところではつねに $n = 2$ のほうが傾きが急なので、追い越されることはありえない。）

解く。 $0 \le y < \frac{1}{2}\pi$ として $x = \sin y$ とおき、$t = 0$ で $y = 0$ とする。すると $\cos y > 0$ なので $(1-x^2)^{1/2} = (\cos^2 y)^{1/2} = \cos y$ となり、方程式は次のようになる。

$$\cos y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos y \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1 \quad \Longrightarrow \quad y = t,$$

ここで $t = 0$ で $y = 0$ であることを用いた。よって解は

$$x = \sin t \qquad \text{ただし} 0 \le t < \tfrac{1}{2}\pi.$$

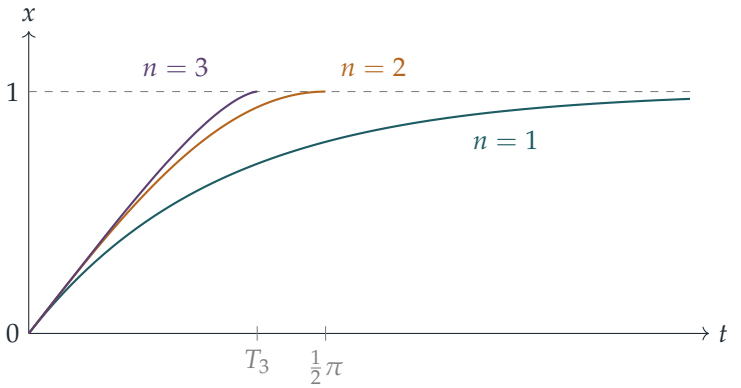
である。これは $t_2(x) = \arcsin x$ と一致する。$n = 1$ の場合とは異なり、解は有限の時間で $x = 1$ に達し、その時刻は $t = \frac{1}{2}\pi$ である。そこには傾き $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$ で到達し、直線 $x = 1$ に接する。

小問 (iii)

$(0,1)$ 上で与えられた不等式 $(1-x^2)^{1/2} < (1-x^3)^{1/3}$ を先ほどとまったく同様に用いると、$n = 3$ の曲線はどの高さでも $n = 2$ の曲線より傾きが急であるから、

$$t_3(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^3)^{1/3}} < \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^2)^{1/2}} = \arcsin x \qquad (0 < x < 1).$$

よって $n = 3$ の曲線もほかと同様に傾き 1 で原点を出発し、$t > 0$ では $x = \sin t$ の真に上側にある。その傾き $(1-x^3)^{1/3}$ は $x \to 1$ のとき 0 まで下がるので、この曲線も直線 $x = 1$ に達するところで平らになる。



$t = \frac{1}{2}\pi$ より前に $x = 1$ に達すること。概形から、$n = 3$ の曲線は $\sin t$ より上にあり、こちらは $\frac{1}{2}\pi$ で 1 に達する。したがって $n = 3$ の曲線は遅くともその時刻までに 1 に達するはずである。真に早いことを示すために、積分の比較において $x \to 1$ とする。$x = 1$ に達するまでの時間は

$$T_3 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^3)^{1/3}}.$$

である。この広義積分は収束する。実際、$[0,1]$ 上で $1-\xi^3 = (1-\xi)(1+\xi+\xi^2) \geq 1-\xi$ なので被積分関数は $(1-\xi)^{-1/3}$ 以下であり、その $[0,1]$ 上の積分は $\frac{3}{2}$ である。さらに、被積分関数は $(0,1)$ 上で $(1-\xi^2)^{-1/2}$ より真に小さいので、

$$T_3 < \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^2)^{1/2}} = \Big[\arcsin\xi\Big]_0^1 = \tfrac{1}{2}\pi.$$

となる。よって、求めるとおり、$n = 3$ の解は時刻 $T_3 < \frac{1}{2}\pi$ で $x = 1$ に達する。（いったん到達すると、傾きは 0 で負にはなりえないので、$x = 1$ にとどまる。）

検算

- 代入して確かめる：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1-\mathrm{e}^{-t}) = \mathrm{e}^{-t} = 1-x$ であり、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin t = \cos t = (1-\sin^2 t)^{1/2}$ が $0 \le t \le \frac{1}{2}\pi$ に対して成り立つ。各方程式のルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）による数値解も、これらの式と一致する。
- 数値的には $T_3 \approx 1.2092$ であり、$\frac{1}{2}\pi \approx 1.5708$ より十分小さい。実際、正確には $T_3 = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ であり（下記参照）、小数第 7 位まで一致する。
- 高さ $x = 0.9$ での 3 つの時刻は $-\ln 0.1 \approx 2.30$、$\arcsin 0.9 \approx 1.12$、$t_3(0.9) \approx 0.98$ であり、予想どおりの順序になっている。

よくある間違い

- 比較しているのが同じ時刻ではなく**同じ高さにおける**傾きであることに触れずに、「傾きが大きいので曲線が高い」と論じること。t を x の関数とみなすことで、議論が正当なものになる。
- なぜ $\cos y \ge 0$ なのかを述べずに $(1-\sin^2 y)^{1/2} = \cos y$ と書くこと。これには $0 \le y \le \frac{1}{2}\pi$ が必要である。
- $x = \sin t$ を $t = \frac{1}{2}\pi$ を越えて延長すること。そこでは減少してしまうが、方程式から $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t \ge 0$ でなければならない。

STEP のその先へ

解が有限の時間で $x = 1$ に達し、その後ずっと $x = 1$ にとどまるのは、$(1-x^n)^{1/n}$ が $x = 1$ でリプシッツ連続（Lipschitz continuous）でないからである。まさにここで、微分方程式（differential equation）の解の一意性定理（uniqueness theorem）が成り立たなくなる（$n = 2$ のとき、$x = 1$ と $x = \sin t$ はともに $(\frac{1}{2}\pi, 1)$ を通る）。到達時刻はベータ関数（Beta function）で表される。$u = \xi^n$ と置換すると $T_n = \frac{1}{n}B(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}) = \dfrac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$ となり、これは $n = 2$ のとき $\frac{1}{2}\pi$、$n = 3$ のとき $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ であり、$n \to \infty$ のとき減少しながら 1 に近づく。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations* では、解の存在と一意性、および解の比較が論じられている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。