解答例

STEP II 2004、第 7 問

純粋数学 ・ 二分法

> **STEP II 2004、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q7

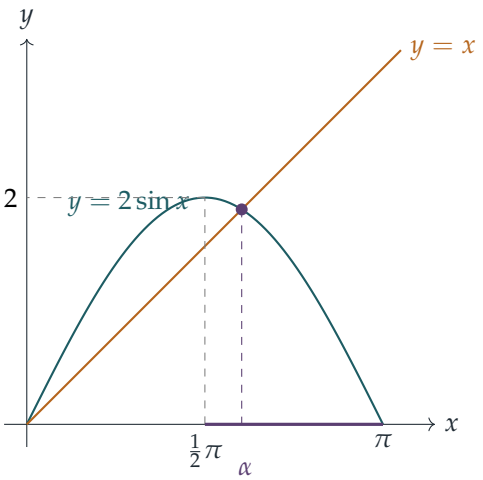
鍵となる考え方

$2\sin x - x = 0$ の根（root）とは、曲線 $y = 2\sin x$ と直線 $y = x$ が交わる点のことである。したがって、グラフを用いる部分は 1 本の正弦曲線と 1 本の直線の話である。二分法（bisection）の各段階は、毎回ひとつの問いに帰着する。すなわち、中点において $2\sin c$ は c より大きいか小さいか、という問いである。半角の公式（half-angle formula）を使うと、$\frac{5}{8}\pi$ と $\frac{9}{16}\pi$ の正弦は入れ子になった平方根で表され、2 つの正の数をその 2 乗どうしで比べれば、計算は与えられた近似値だけで済む。

解答

I_0 にちょうど 1 つの根があること

$\mathrm{f}(x) = 0 \iff 2\sin x = x$ であるから、根は $y = 2\sin x$ と $y = x$ の交点の x 座標である。



$[\frac{1}{2}\pi, \pi]$ において、

- $x = \frac{1}{2}\pi$ では曲線の高さは 2、直線の高さは $\frac{1}{2}\pi < 2$（$\pi < 4$ より）であるから、曲線は直線より上にある。
- $x = \pi$ では曲線の高さは 0、直線の高さは $\pi > 0$ であるから、曲線は直線より下にある。
- 曲線 $y = 2\sin x$ はこの区間で減少し、直線 $y = x$ は増加する。

どちらのグラフも連続（continuous）であるから、曲線はこの区間のどこかで直線と交わらなければならない。さらに、一方は下がり他方は上がるので、曲線がいったん直線より下に来れば、再び上に戻ることはない。よって両者はちょうど 1 回交わり、$\mathrm{f}(x) = 0$ は I_0 にちょうど 1 つの根 α をもつ。f を用いて言えば、$\mathrm{f}(\frac{1}{2}\pi) = 2 - \frac{1}{2}\pi > 0$、$\mathrm{f}(\pi) = -\pi < 0$ であり、f はそこで狭義単調減少（strictly decreasing）である。

以下の二分法の各段階では、f の符号が変わる側の半分を残す。$\mathrm{f}(\frac{1}{2}\pi) > 0$ であるから、すべては $\mathrm{f}(c_n)$ の符号で決まる。$\mathrm{f}(c_n) < 0$ ならば根は c_n の左にあり、$\mathrm{f}(c_n) > 0$ ならば右にある。

I_1 を求める

ここで $c_0 = \frac{3}{4}\pi$ であり、

$$\mathrm{f}(\tfrac{3}{4}\pi) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{3}{4}\pi \approx 1.4 - \tfrac{3}{4}\sqrt{10}.$$

$\sqrt{10} > 3$ であるから $\frac{3}{4}\sqrt{10} > 2.25 > 1.4$ となり、$\mathrm{f}(c_0) < 0$ である。$\mathrm{f}(a_0) > 0$ と合わせて $\mathrm{f}(a_0)\mathrm{f}(c_0) < 0$ となるので、

$$I_1 = [\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{3}{4}\pi].$$

I_2 を求める

次に $c_1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + \frac{3}{4}\pi) = \frac{5}{8}\pi$ であり、$2\sin\frac{5}{8}\pi - \frac{5}{8}\pi$ の符号を調べる必要がある。

考えてみよう 電卓を使わずに $\sin\frac{5}{8}\pi$ を求めるにはどうすればよいか。

$\sin\frac{5}{8}\pi = \sin(\pi - \frac{5}{8}\pi) = \sin\frac{3}{8}\pi = \cos\frac{1}{8}\pi$ を用い、さらに倍角の公式（double-angle formula）$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ に $\theta = \frac{1}{8}\pi$ を代入すると、

$$4\cos^2\tfrac{1}{8}\pi = 2\big(1 + \cos\tfrac{1}{4}\pi\big) = 2 + \sqrt{2}.$$

よって $(2\sin\frac{5}{8}\pi)^2 = 2 + \sqrt{2}$ である。$2\sin\frac{5}{8}\pi$ と $\frac{5}{8}\pi$ はともに正であるから、2 乗どうしを比べてよい。

$$(2\sin\tfrac{5}{8}\pi)^2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3.4, \qquad (\tfrac{5}{8}\pi)^2 \approx \tfrac{25}{64}\cdot 10 = \tfrac{250}{64} \approx 3.9.$$

したがって $2\sin\frac{5}{8}\pi < \frac{5}{8}\pi$、すなわち $\mathrm{f}(c_1) < 0$ である。ここでも $\mathrm{f}(a_1) = \mathrm{f}(\frac{1}{2}\pi) > 0$ であるから $\mathrm{f}(a_1)\mathrm{f}(c_1) < 0$ となり、

$$I_2 = [\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{5}{8}\pi],$$

となって、示すべきことが得られた。

I_3 を求める

次に $c_2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + \frac{5}{8}\pi) = \frac{9}{16}\pi$ である。先と同様に $\sin\frac{9}{16}\pi = \sin\frac{7}{16}\pi = \cos\frac{1}{16}\pi$ であり、倍角の公式に $\theta = \frac{1}{16}\pi$ を代入すると

$$(2\sin\tfrac{9}{16}\pi)^2 = 4\cos^2\tfrac{1}{16}\pi = 2\big(1 + \cos\tfrac{1}{8}\pi\big) = 2 + 2\cos\tfrac{1}{8}\pi = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}},$$

が得られる。ここで前の段階で求めた $2\cos\frac{1}{8}\pi = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ を用いた。$\sqrt{2} \approx 1.4$ とすると $\sqrt{2 + \sqrt{2}} \approx \sqrt{3.4} > 1.8$（$1.8^2 = 3.24$ より）であるから、

$$(2\sin\tfrac{9}{16}\pi)^2 > 3.8, \qquad (\tfrac{9}{16}\pi)^2 \approx \tfrac{81}{256}\cdot 10 = \tfrac{810}{256} < 3.2.$$

よって $2\sin\frac{9}{16}\pi > \frac{9}{16}\pi$、すなわち $\mathrm{f}(c_2) > 0$ である。今回は $\mathrm{f}(a_2)\mathrm{f}(c_2) > 0$ であり、一方 $\mathrm{f}(c_2)\mathrm{f}(b_2) = \mathrm{f}(\frac{9}{16}\pi)\,\mathrm{f}(\frac{5}{8}\pi) < 0$ である。したがって

$$I_3 = [\tfrac{9}{16}\pi, \tfrac{5}{8}\pi].$$

ここでの近似は安全である。各中点において比べている 2 つの量の差はおよそ 0.5 以上あり、$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7$ や $\pi \approx \sqrt{10}$ による誤差よりはるかに大きい。

検算

- 二分法を数値的に実行すると同じ区間が得られ、根は $\alpha \approx 1.8955$ であって、$\frac{9}{16}\pi \approx 1.767$ と $\frac{5}{8}\pi \approx 1.963$ の間にある。
- 正確な値は近似値と一致する。$f(\frac{3}{4}\pi) \approx -0.942$、$f(\frac{5}{8}\pi) \approx -0.116$、$f(\frac{9}{16}\pi) \approx 0.194$ である。
- 各区間の長さは直前の区間の半分になっている。$\frac{1}{2}\pi$、$\frac{1}{4}\pi$、$\frac{1}{8}\pi$、$\frac{1}{16}\pi$ である。

よくある間違い

- 符号の変化を示すだけで、根が *1 つだけ*である理由を説明しないこと。符号の変化だけでは少なくとも 1 つの根があることしかわからない。一意性には、一方が減少し他方が増加するという議論が必要である。
- 両者がともに正であることを先に確認せずに、2 乗して $2\sin c$ と c を比べること。

STEP のその先へ

符号の変化による議論は中間値の定理（intermediate value theorem）であり、大学の解析学（analysis）の講義で最初に出会う大きな定理のひとつである。その証明には実数の完備性（completeness）が必要であり、二分法は本質的にその証明をアルゴリズムとして実行したものである。二分法は必ず収束（converge）するが、その速さは遅い（1 段階につき 2 進法で 1 桁）。ニュートン–ラフソン法（Newton–Raphson method）などの方法ははるかに速く収束するが、失敗することもある。そのため、数値解析（numerical analysis）の大部分は安全性と速さの兼ね合いをめぐるものである。理論については Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。