解答例

STEP II 2004、第 6 問

純粋数学 • ベクトルの分解

> **STEP II 2004、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q6

鍵となる考え方

ベクトルを $\mathbf{a}$ に平行な部分と $\mathbf{a}$ に垂直な部分に分けることは、射影（projection）にほかならない。$\mathbf{a}$ は単位ベクトル（unit vector）なので、任意のベクトル $\mathbf{v}$ のその方向の成分は $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{a}$ である。後半は、同じ考え方を 1 次元上げたものである。ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{q}$ は Π 内の互いに垂直な方向であり、$\mathbf{R}$ が 3 つ目の垂直な方向を与える。したがって、各方向へ順に射影してもよいし、未知の係数倍を置いて内積（dot product）で垂直条件を課してもよい。ここでは後者で解き、前者を検算に用いる。

解答

ベクトル $\mathbf{p}$ と $\mathbf{q}$

$\mathbf{p}$ は $\mathbf{a}$ に平行なので、$\mathbf{p}=\lambda\mathbf{a}$ とおく。すると

$$\mathbf{q}=\mathbf{a}+\mathbf{b}-\lambda\mathbf{a}=(1-\lambda)\mathbf{a}+\mathbf{b},$$

となる。$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が Π 内にあるので、これは自動的に Π 内にある。$\mathbf{q}$ が $\mathbf{a}$ に垂直であるためには

$$0=\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}=(1-\lambda)\,|\mathbf{a}|^2+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(1-\lambda)+3,$$

が必要である。ここで $|\mathbf{a}|=1$ と $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=3$ を用いた。よって $\lambda=4$ であり、

$$\boxed{\mathbf{p}=4\mathbf{a},\qquad \mathbf{q}=\mathbf{b}-3\mathbf{a}.}$$

実際、$\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}=3-3=0$ であり、$\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$ である。（同じことだが、$\mathbf{p}$ は射影 $((\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}=4\mathbf{a}$ である。）

ベクトル P、Q、R

まず、後で必要になる事実をいくつか確認する。$|\mathbf{b}| = 5$ より

$$|\mathbf{q}|^2 = |\mathbf{b}|^2 - 6\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + 9|\mathbf{a}|^2 = 25 - 18 + 9 = 16,$$

なので $|\mathbf{q}| = 4$ である。特に $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ なので $\mathbf{b}$ は $\mathbf{a}$ に平行でなく、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は平面 Π を張る（span）。

$\mathbf{P} = \alpha\mathbf{a}$、$\mathbf{Q} = \beta\mathbf{q} = \beta(\mathbf{b} - 3\mathbf{a})$ とおく。すると $\mathbf{R}$ は必然的に次のようになる。

$$\mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - \alpha\mathbf{a} - \beta(\mathbf{b} - 3\mathbf{a}) = \mathbf{c} + u\,\mathbf{a} + v\,\mathbf{b}, \qquad \text{ただし} u = 1 - \alpha + 3\beta,\ v = 1 - \beta.$$

考えてみよう 「$\mathbf{R}$ が Π に垂直である」ことを、どのように方程式に翻訳すればよいか？

ベクトルが平面に垂直であるのは、その平面内の平行でない 2 つのベクトルの両方に垂直であるとき、かつそのときに限る。$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ がそのような組であることは先ほど見た。よって条件は $\mathbf{R}\cdot\mathbf{a} = 0$ かつ $\mathbf{R}\cdot\mathbf{b} = 0$ である。$\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = -2$、$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 2$、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 3$、$|\mathbf{a}|^2 = 1$、$|\mathbf{b}|^2 = 25$ を用いると、

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{a} = -2 + u + 3v = 0,$$
$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{b} = 2 + 3u + 25v = 0.$$

第 1 式から $u = 2 - 3v$ が得られる。これを第 2 式に代入すると $8 + 16v = 0$ となるので、

$$v = -\tfrac{1}{2}, \qquad u = \tfrac{7}{2}.$$

すると $\beta = 1 - v = \tfrac{3}{2}$、$\alpha = 1 + 3\beta - u = 1 + \tfrac{9}{2} - \tfrac{7}{2} = 2$ である。したがって

$$\boxed{\mathbf{P} = 2\mathbf{a}, \qquad \mathbf{Q} = \tfrac{3}{2}(\mathbf{b} - 3\mathbf{a}), \qquad \mathbf{R} = \mathbf{c} + \tfrac{7}{2}\mathbf{a} - \tfrac{1}{2}\mathbf{b}.}$$

これらを加えると、$\mathbf{a}$ の係数は $2 - \tfrac{9}{2} + \tfrac{7}{2} = 1$、$\mathbf{b}$ の係数は $\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2} = 1$、$\mathbf{c}$ の係数は 1 となるので、求めるとおり $\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ が成り立つ。

最後に、$\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ である。もし零ベクトルならば $\mathbf{c} = \tfrac{1}{2}\mathbf{b} - \tfrac{7}{2}\mathbf{a}$ が Π 内にあることになり、$\mathbf{c}$ は Π に平行でないという仮定に反する。この仮定こそが、$\mathbf{R}$ を真の法線ベクトル（normal vector）にしているのである。

別の見方：互いに垂直な軸への射影

単位ベクトル $\mathbf{a}$、$\hat{\mathbf{q}} = \frac{1}{4}(\mathbf{b} - 3\mathbf{a})$ と、Π の単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ は正規直交系（orthonormal set）をなす。よって $\mathbf{P}$ と $\mathbf{Q}$ は、$\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ の最初の 2 つへの射影である。

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = 1 + 3 - 2 = 2, \qquad \text{よって} \mathbf{P} = 2\mathbf{a};$$
$$\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{q}} = \tfrac{1}{4}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{q}) = \tfrac{1}{4}(0 + 16 + 8) = 6, \qquad \text{よって} \mathbf{Q} = 6\hat{\mathbf{q}} = \tfrac{3}{2}(\mathbf{b} - 3\mathbf{a}),$$

ここで $\mathbf{b}\cdot\mathbf{q} = 25 - 9 = 16$ と $\mathbf{c}\cdot\mathbf{q} = 2 + 6 = 8$ を用いた。残りの $\mathbf{R}$ は、$\mathbf{c}$ の Π に垂直な成分である。これは上の答えと一致する。

検算

- 直接計算：$\mathbf{R}\cdot\mathbf{a} = -2 + \frac{7}{2} - \frac{3}{2} = 0$ であり、$\mathbf{R}\cdot\mathbf{b} = 2 + \frac{21}{2} - \frac{25}{2} = 0$ である。
- 具体例：$\mathbf{a} = \mathbf{i}$、$\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$、$\mathbf{c} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ とおくと、与えられた条件をすべて満たす。このとき $\mathbf{q} = 4\mathbf{j}$、$\mathbf{P} = 2\mathbf{i}$、$\mathbf{Q} = 6\mathbf{j}$、$\mathbf{R} = \mathbf{k}$ であり、これらの和は $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}$ となる。
- 条件を満たし、向きをランダムにとった 2000 通りの配置でも公式を検証した。どの場合も $\mathbf{q}\cdot\mathbf{a} = 0$、$|\mathbf{q}| = 4$ であり、$\mathbf{R}$ は Π に垂直で、3 つのベクトルの和は $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ となった。いずれも誤差 10^{-9} 以内である。

よくある間違い

- $\mathbf{p} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a} = 3\mathbf{a}$ としてしまう。これは $\mathbf{b}$ だけの射影である。必要なのは $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ の射影であり、それは $4\mathbf{a}$ である。
- $\mathbf{R}\cdot\mathbf{a} = 0$ だけを課してしまう。平面に垂直であるためには、独立な 2 つの条件が必要である。
- $\mathbf{P} = \mathbf{p}$、$\mathbf{Q} = \mathbf{q}$ と思い込む。$\mathbf{c}$ 自身が Π 内の成分をもつので、$\mathbf{c}$ を加えると平面内の成分も変わる。

STEP のその先へ

これはグラム・シュミットの直交化法（Gram–Schmidt process）の縮小版である。$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ から互いに垂直な方向 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b} - 3\mathbf{a}$、$\mathbf{c} + \frac{7}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$ を作り、それらに沿ってベクトルを分解したのである。同じ手順は任意の次元で使える。これは直交射影（orthogonal projection）、最小二乗法（least-squares fitting）、行列の QR 分解（QR factorisation）の

基礎となっている。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、これらすべてを展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。