解答例

STEP II 2004、第 5 問

純粋数学 ・ 積分方程式

> **STEP II 2004、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q5

鍵となる考え方

未知の関数（function）が積分の中に入っているので一見恐ろしく見えるが、加法定理（compound-angle formula）で $\sin(x+t)$ を展開すれば話は変わる。すると t は積分の外に出て、積分の中に残るのは二つの定まった数である。したがって f は t に $\sin t$ と $\cos t$ の一次結合を加えたものでなければならず、問題全体は二つの連立一次方程式から二つの定数を求めることに帰着する。前半の二つの積分は、まさにその方程式に必要なものである。

解答

二つの積分

$u = x$、$\mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x$ として部分積分（integration by parts）を行うと、

$$\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x = \Big[-x\cos x\Big]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x = (-\pi\cos\pi - 0) + \Big[\sin x\Big]_0^\pi = \pi.$$

同様に、$u = x$、$\mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x$ とすると、

$$\int_0^\pi x\cos x\,\mathrm{d}x = \Big[x\sin x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = 0 - \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = -(1+1) = -2.$$

また、$[0,\pi]$ 上の三つの標準的な積分も必要になる。

$$\int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\pi \sin x\cos x\,\mathrm{d}x = 0.$$

最初の二つは $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ と $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ から従う。$\cos 2x$ を一周期にわたって積分すると o になるからである。三つ目は同じ理由で $\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2x\,\mathrm{d}x = 0$ となる。

f の形

$\sin(x+t) = \sin x \cos t + \cos x \sin t$ と展開する。積分は x について行うので、$\sin t$ と $\cos t$ は定数であり、積分の外に出せる。

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(t) &= t + \int_0^\pi \mathrm{f}(x)(\cos x \sin t + \sin x \cos t)\,\mathrm{d}x \\ &= t + \sin t \int_0^\pi \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x + \cos t \int_0^\pi \mathrm{f}(x)\sin x\,\mathrm{d}x \\ &= t + A\sin t + B\cos t, \end{aligned}$$

ここで A と B は与えられた二つの積分である。これらは t に依存しないので、真に定数である。これが求める形である。

A と B を求める

考えてみよう f がわからないのに、どうやって A と B を求めればよいのだろうか？

わかっているのはその形、すなわち $\mathrm{f}(x) = x + A\sin x + B\cos x$ である。これを $(*)$ に代入し直すと、積分は A と B を用いて計算できるものになり、両辺を比較すればそれらについての方程式が得られる。

上で求めた $\sin(x+t)$ の展開を用いて、$(*)$ の右辺に代入すると、

$$t + \sin t \int_0^\pi (x + A\sin x + B\cos x)\cos x\,\mathrm{d}x + \cos t \int_0^\pi (x + A\sin x + B\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x.$$

先に求めた積分を用いると、

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (x + A\sin x + B\cos x)\cos x\,\mathrm{d}x &= -2 + A\cdot 0 + B\cdot\frac{\pi}{2} = -2 + \frac{\pi}{2}B, \\ \int_0^\pi (x + A\sin x + B\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x &= \pi + A\cdot\frac{\pi}{2} + B\cdot 0 = \pi + \frac{\pi}{2}A. \end{aligned}$$

よって $(*)$ は、すべての t に対して

$$t + A\sin t + B\cos t = t + \left(-2 + \frac{\pi}{2}B\right)\sin t + \left(\pi + \frac{\pi}{2}A\right)\cos t.$$

が成り立つことを意味する。$\sin t$ と $\cos t$ の係数を比較すると（この恒等式はすべての t で成り立つので、これは正当である。$t = \frac{\pi}{2}$、次いで $t = 0$ を代入すれば各係数が取り出せる）、

$$A = -2 + \frac{\pi}{2}B, \qquad B = \pi + \frac{\pi}{2}A.$$

を得る。第二式を第一式に代入すると、

$$A = -2 + \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{4}A \quad\Longrightarrow\quad A\left(1 - \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi^2}{2} - 2, \quad \text{すなわち} \quad A\cdot\frac{4-\pi^2}{4} = -\frac{4-\pi^2}{2}.$$

$\pi^2 \neq 4$ であるから $4-\pi^2$ で割ってよく、$A=-2$ を得る。すると $B=\pi+\frac{\pi}{2}(-2)=0$ である。したがって

$$A=-2, \qquad B=0, \qquad \text{ゆえに} \qquad \mathrm{f}(t)=t-2\sin t.$$

検算

答えを A と B の定義に直接照らして確かめる。$\mathrm{f}(x)=x-2\sin x$ のとき、

$$\int_0^{\pi} \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x = -2-2\cdot 0=-2=A, \qquad \int_0^{\pi} \mathrm{f}(x)\sin x\,\mathrm{d}x = \pi-2\cdot\frac{\pi}{2}=0=B.$$

数値的には、シンプソンの公式（Simpson's rule）により $\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x \approx 3.14159$、$\int_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x \approx -2.00000$ が得られる。また、$\mathrm{f}(t)=t-2\sin t$ として $(*)$ の右辺を無作為に選んだ 50 個の t の値で計算したところ、いずれの場合も 10^{-9} 以内の誤差で $\mathrm{f}(t)$ と一致した。

よくある間違い

- $\int_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x$ の負号を忘れる。境界項は消え、$-\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=-2$ となる。
- どちらの積分が $\sin t$ に掛かるかを取り違える。$\sin(x+t)$ のうち $\cos x\sin t$ の部分から $A\sin t$ が生じ、$A=\int \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x$ であって、$\int \mathrm{f}(x)\sin x\,\mathrm{d}x$ ではない。
- $1-\frac{\pi^2}{4}$ が 0 でないことに触れずにそれで割ってしまう。

STEP のその先へ

方程式 $(*)$ は**第二種フレドホルム積分方程式**（Fredholm integral equation of the second kind）である。その核 $\sin(x+t)=\sin x\cos t+\cos x\sin t$ は、x の関数と t の関数の積の有限和（「退化核」（degenerate kernel）または「分離核」（separable kernel））であり、まさにそのために問題が 2×2 の連立一次方程式に帰着するのである。条件 $\pi^2\neq 4$ は、この連立方程式の行列式（determinant）が 0 でないことを述べている。もし 0 であれば、解が存在しないか無数に存在することになり、これは正則でない（特異な）行列（singular matrix）の積分方程式版である。この背後にある線形代数については、Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。