解答例

STEP II 2004、第 4 問

純粋数学 • 図形における最適化

STEP II 2004、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

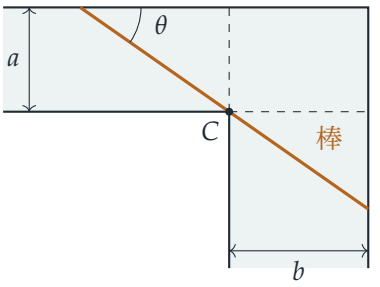
step.maths.org/questions/04-s2-q4

鍵となる考え方

どのように動かしても、棒（あるいはテーブル）は一方の廊下に沿った向きから他方の廊下に沿った向きへと回転しなければならないので、ある瞬間にはその間のどの角度 θ も壁となす。角度を固定すると、使える長さが最大になるのは内側の角にちょうど接する直線に沿う場合であり、その長さは直角三角形を用いて容易に計算できる。したがって、物体が角を曲がれるのは、その長さがすべての角度にわたるこれらの長さの**最小値**以下であるときに限られ、その最小値は微分法によって求められる。

解答

以下では一貫して、外側の角を原点に置き、外側の壁を $y = 0$（幅 a の廊下で、左へ延びる）と $x = 0$（幅 b の廊下で、下へ延びる）に沿わせる。このとき内側の角は $C = (-b, -a)$ である。



小問 (i)

ある瞬間に、棒が a の廊下の壁と鋭角（acute angle）θ をなし、図のように外側の壁 $y = 0$ から外側の壁 $x = 0$ に向かって下り勾配になっているとする。

角度 θ における最長の線分。 C を通り角度 θ をなす直線を考える。C から壁 $y = 0$ までは鉛直方向に a だけ上がるので、その部分の長さは $a\operatorname{cosec}\theta$ である。C から壁 $x = 0$ までは水平方向に b だけ進むので、その部分の長さは $b\sec\theta$ である。よって、この直線の二つの外側の壁の間にある弦（chord）の長さは

$$f(\theta) = a\operatorname{cosec}\theta + b\sec\theta.$$

である。一方の廊下から他方の廊下へと延びる角度 θ の他の直線は、いずれも C より外側を通らなければならない（そうでなければ内側の壁を突き抜けてしまう）。そのような直線は二つの外側の壁とともに、より小さな相似（similar）な直角三角形を切り取るので、外側の壁の間にあるその弦は $f(\theta)$ より短い。また、この瞬間に棒が完全に a の廊下の中にあるならば、棒は幅 a の帯に収まるので $L\sin\theta \le a$ であり、$L \le a\operatorname{cosec}\theta < f(\theta)$ を得る。同様に、完全に b の廊下の中にあるならば $L \le b\sec\theta < f(\theta)$ である。いずれの場合も

$$L \le f(\theta) \quad \text{棒が通過する各角度 } \theta \text{ について。}$$

が成り立つ。棒が第一の廊下に沿った向きから第二の廊下に沿った向きへと回転するとき、θ は 0 の近くから $\frac{1}{2}\pi$ の近くまで連続的に変化するので、その間のすべての値をとる。したがって**すべての** $\theta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ に対して $L \le f(\theta)$ であり、すなわち L は f の最小値以下である。

f の最小化。 微分すると

$$f'(\theta) = -\frac{a\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{b\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{b\sin^3\theta - a\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}.$$

となる。これが 0 になるのはちょうど $\tan^3\theta = a/b$ のときであり、$(0, \frac{1}{2}\pi)$ において tan は増加関数であるから、この方程式はその区間にただ一つの解 α をもつ。f' の符号は $b\tan^3\theta - a$ の符号と一致し、α より前では負、後では正であるから、α で最小となる。（また、両端で $f \to \infty$ である。）$L \le f(\theta)$ において $\theta = \alpha$ とすると

$$L \le a\operatorname{cosec}\alpha + b\sec\alpha, \qquad \tan^3\alpha = \frac{a}{b},$$

を得る。これが示すべきことであった。

小問 (ii)

今度はテーブルの長辺が棒の役割を果たす。内側の長辺は角度 θ の直線上にあり、外側の長辺はそれと平行で、外側の角の方へ距離 w だけ寄った直線上にある。外側にあるテーブルの二つの頂点は、どちらも外側の壁の内側になければならない。

外側の辺に沿って使える長さ。 外側の角 O からの距離が d である角度 θ の直線は、O のところに直角三角形を切り取る。この三角形の斜辺は c（壁の間の弦）、二辺は $c\cos\theta$ と $c\sin\theta$、O からの高さは d である。面積の 2 倍は $c\cos\theta\cdot c\sin\theta$ とも $c\,d$ とも表せるので

$$c=\frac{d}{\sin\theta\cos\theta}=2d\operatorname{cosec}2\theta.$$

である。弦の長さは O からの距離に比例する。したがって、直線を（O に向かって）w だけ内側へ動かすと、その弦は $2w\operatorname{cosec}2\theta$ だけ短くなる。

> **考えてみよう** なぜ外側の長辺は、C を通る直線から w だけ内側にある直線上で、外側の壁の間に収まらなければならないのか。

内側の長辺は内側の角を越えることができないので、C を通る直線上かそれより外側にある。すると外側の長辺は、少なくとも w だけさらに外側にある直線上にあり、その弦は高々 $f(\theta)-2w\operatorname{cosec}2\theta$ である。（二つの短辺は外側の頂点から長辺に垂直に内側へ延び、廊下の中に収まるので、これ以上の制約は生じない。）逆にテーブル全体が a の廊下の中にあるならば、帯を横切る方向の高さは $l\sin\theta+w\cos\theta\le a$ である。これから得られる評価 $l\le(a-w\cos\theta)\operatorname{cosec}\theta$ は、$w<b$ であるから、下の $g(\theta)$ より $(b-w\sin\theta)\sec\theta>0$ だけ小さい。b の廊下の場合も同様である。よって小問 (i) とまったく同じく、通り抜けられるためにはすべての $\theta\in(0,\frac{1}{2}\pi)$ に対して $l\le g(\theta)$ が必要である。ただし

$$g(\theta)=a\operatorname{cosec}\theta+b\sec\theta-2w\operatorname{cosec}2\theta.$$

である。（テーブルは両方の廊下より幅が狭く、$w<a$ かつ $w<b$ でなければならない。さもなければ廊下に沿って進むことすらできない。）

g の最小化。 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\operatorname{cosec}2\theta=-\dfrac{2\cos2\theta}{\sin^2 2\theta}$ であるから

$$g'(\theta)=-\frac{a\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{b\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{4w\cos2\theta}{\sin^2 2\theta}.$$

である。これに $\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{1}{4}\sin^2 2\theta>0$ を掛ける。すると $g'(\theta)=0$ となるのはちょうど

$$-a\cos^3\theta+b\sin^3\theta+w\cos2\theta=0,\qquad\text{すなわち}\qquad w\cos2\theta=\cos^3\theta\,(a-b\tan^3\theta).$$

のときである。$\cos2\theta=\cos^2\theta\,(1-\tan^2\theta)$ と書き、$\cos^2\theta$ で割る。もし $\theta=\frac{1}{4}\pi$ ならば方程式は $0=\frac{1}{2\sqrt{2}}(a-b)$ となるが、$a\ne b$ であるからこれは起こりえない。よって停留点（stationary point）では $\tan^2\theta\ne1$ であり、$1-\tan^2\theta$ で割って

$$w=\left(\frac{a-b\tan^3\theta}{1-\tan^2\theta}\right)\cos\theta.$$

を得る。$\theta\to0^+$ のとき、$w<a$ であるから $g(\theta)\approx(a-w)/\theta\to+\infty$ である。同様に、$w<b$ であるから $\theta\to\frac{1}{2}\pi^-$ のとき $g\to+\infty$ である。よって連続関数（continuous

function）g は区間の内部の点で最小値をとり、そこでは $g' = 0$ である。この点を β とすると、β は上の方程式を満たす。$l \leq g(\theta)$ において $\theta = \beta$ とすると

$$l \leq a \operatorname{cosec} \beta + b \sec \beta - 2w \operatorname{cosec} 2\beta,$$

を得る。これが示すべきことであった。（実際には、この方程式の**どの**根 β に対しても $l \leq \min g \leq g(\beta)$ であるから、どの根を指すかは問題にならない。）

検算

- 小問 (ii) で $w = 0$ とすると $\tan^3 \beta = a/b$ と小問 (i) の評価が得られ、期待どおりである。
- 小問 (i) では $\sin \alpha = a^{1/3}/\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}$、$\cos \alpha = b^{1/3}/\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}$ であるから、評価は $\left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^{3/2}$ となる。$a = 1$、$b = 8$ のとき、これは $5^{3/2} \approx 11.18$ であり、f の最小値を数値的に探索した結果と一致する。
- $a \neq b$ と $w < \min(a, b)$ を無作為に数百組選び、g の最小値を総当たりで求め、最小値を与える角度が β の方程式を満たすことを確かめた。また、弦の長さも座標から直接確認した。

よくある間違い

- f を最小化するのではなく最大化してしまう。棒は**最も厳しい**角度を切り抜けなければならないので、評価は使える長さの最小値である。
- テーブルの**内側**の辺が外側の壁によって制限されると考えてしまう。締めつけられるのは外側の辺、すなわち外側の角に w だけ近い直線上にある辺である。
- $1 - \tan^2 \beta$ で割る際に、それには $a \neq b$ が必要であることに気づかない。

STEP のその先へ

小問 (i) は古典的な「角を曲がるはしご」の問題であり、その答え $\left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^{3/2}$ はアステロイド（astroid）と関係している。内側の角を通る直線たちが包絡線（envelope）を描くのである。小問 (ii) は**動くソファ問題**（moving sofa problem）の小さな特別な場合である。これは、幅 1 の直角の曲がり角を運んで曲がることのできる図形のうち、面積が最大のものはどのような形かを問う問題である。1966 年に Leo Moser によって提起され、その歴史の大半において完全な解決を拒み続けてきた。この趣旨の、幾何と微積分が出会う問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*

（高度な数学の問題集）に挑戦するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。