解答例

STEP II 2004、第 3 問

純粋数学 • 曲線の概形

> **STEP II 2004、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q3

鍵となる考え方

すべては一つの曲線から始まる。C については、導関数（derivative）を完全に因数分解（factorise）する。重なった因数 $(x-2)$ は微分しても残り、残りの部分は二次式（quadratic）になる。他の二つの曲線は一から調べるのではなく、C をもとに組み立てる。(i) では $y=\pm\sqrt{f(x)}$ を考え、(ii) では f に x^2 を代入する。f が正になる範囲、f が単根（simple root）をもつ場所、重根（repeated root）をもつ場所を把握しておくこと。それらの細部が曲線の形を決める。

解答

$f(x)=x(x+1)(x-2)^4$ とおく。すなわち C は $y=f(x)$ である。

C の停留点

積の微分法（product rule）により、共通因数 $(x-2)^3$ をくくり出すと

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+1)(x-2)^4+4x(x+1)(x-2)^3 \\ &= (x-2)^3[(2x+1)(x-2)+4x^2+4x] \\ &= (x-2)^3(6x^2+x-2) \\ &= (x-2)^3(3x+2)(2x-1). \end{aligned}$$

よって停留点（stationary point）は $x=-\frac{2}{3}$、$x=\frac{1}{2}$、$x=2$ にあり、

$$f(-\tfrac{2}{3})=(-\tfrac{2}{3})(\tfrac{1}{3})(-\tfrac{8}{3})^4=-\frac{8192}{729}, \qquad f(\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot(-\tfrac{3}{2})^4=\frac{243}{64}, \qquad f(2)=0.$$

これらを分類するために、f' の各因数の符号を調べる。

	$x < -\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3} < x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 2$	$x > 2$
$(x-2)^3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(3x+2)(2x-1)$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

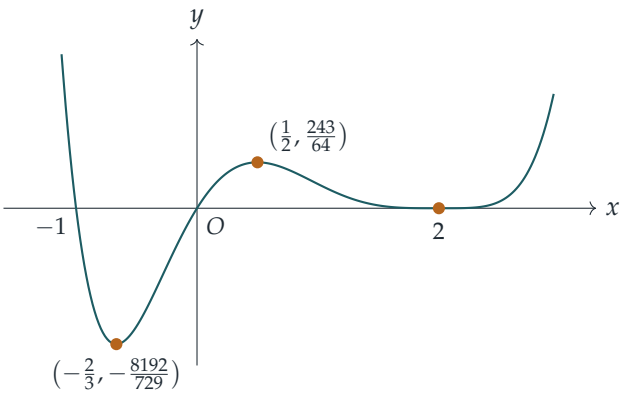
したがって

- $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{8192}{729}\right)$ は極小（minimum）である（f' が $-$ から $+$ に変わる）。
- $\left(\frac{1}{2}, \frac{243}{64}\right)$ は極大（maximum）である（f' が $+$ から $-$ に変わる）。
- $(2,0)$ は極小である（f' が $-$ から $+$ に変わる）。

最後のものは微分を使わなくても明らかである。$x = 2$ の近くでは $x(x+1) > 0$ かつ $(x-2)^4 \geq 0$ なので、$f(x) \geq 0$ となる。

C の概形

曲線は $x = -1$ と $x = 0$ で x 軸と交わり（単根であり、傾きは $f'(-1) = -81$、$f'(0) = 16$）、$x = 2$ で x 軸に接する。$x = 2$ の近くでは $f(x) \approx 2 \cdot 3\,(x-2)^4 = 6(x-2)^4$ なので、曲線はそこで非常に平らになる。f は主係数（leading coefficient）が正の 6 次多項式であるから、$x \to \pm\infty$ のとき $y \to +\infty$ である。図の縦軸は縮めて描いてある。



小問 (i)

今度は $y^2 = f(x)$ なので、$y = \pm\sqrt{f(x)}$ である。形は次の三つの事実で決まる。

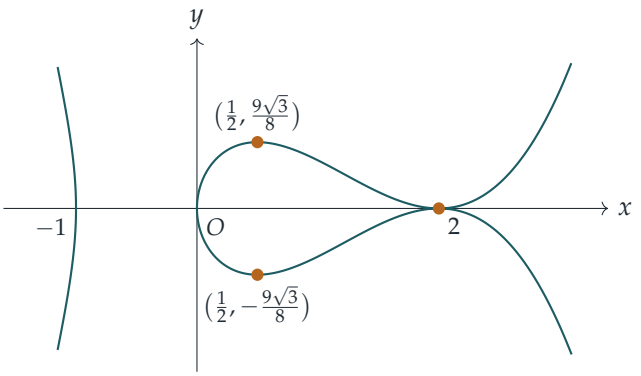
- **曲線が存在する範囲。** $f(x) \geq 0$ が必要であり、C から、これは $x \leq -1$ または $x \geq 0$ を意味する。$-1 < x < 0$ では曲線は存在しない。

- **対称性。** y を $-y$ に置き換えても方程式は変わらないので、曲線は x 軸に関して対称（symmetric）である。上半分 $y=\sqrt{f(x)}=(x-2)^2\sqrt{x(x+1)}$ を描き、それを折り返せば十分である。
- **停留点。** $f>0$ のとき $y=\sqrt{f}$ に対して $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=f'/(2\sqrt{f})$ であるから、上半分が停留するのは、ちょうど $f'=0$ かつ $f>0$ となるところである。残るのは $x=\frac{1}{2}$ のみであり（点 $x=-\frac{2}{3}$ は定義域の外にある）、上半分では $\left(\frac{1}{2},\sqrt{243/64}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{9\sqrt{3}}{8}\right)$ で極大、下半分では $\left(\frac{1}{2},-\frac{9\sqrt{3}}{8}\right)$ で極小となる。

考えてみよう $f=0$ となる $(-1,0)$、$(0,0)$、$(2,0)$ では何が起こるか？

$x=0$ のような**単根**では $f(x)\approx 16x$ なので、原点の近くで $y^2\approx 16x$ となる。これは横向きの放物線であり、曲線は**鉛直な**接線（tangent）をもって軸を横切る。$x=-1$ でも同様で、そこでは $y^2\approx 81(-1-x)$ である。**重根** $x=2$ では $y^2\approx 6(x-2)^4$ なので、$y\approx\pm\sqrt{6}\,(x-2)^2$ となる。これは軸の上と下にある二本の放物線状の弧であり、どちらも $(2,0)$ で x 軸に接する。したがって上半分と下半分はそこで共通の水平な接線をもって出会い、$(2,0)$ で上半分は極小、下半分は極大となる。

$|x|$ が大きいとき $y\approx\pm|x|^3$ である。よって曲線は、$(0,0)$ から $(2,0)$ までの閉じたループが $(2,0)$ でくびれ、そこから右へ開いていく二本の枝へと続く部分と、それとは別に $(-1,0)$ を通り左へ開いていく部分からなる。



小問 (ii)

ここでは $y=x^2(x^2+1)(x^2-2)^4=f(x^2)$ である。二つの観察で大部分が片づく。

- x は x^2 の形でしか現れないので、曲線は y 軸に関して対称である。
- x が $[0,\infty)$ を動くとき、$u=x^2$ は $[0,\infty)$ を増加しながら動く。よって $x\geq 0$ の部分の曲線は、C の $x\geq 0$ の部分を媒介変数を取り替えて（re-parametrised）表したものである。特に、いたるところで $y\geq 0$ であり、C の x が負の部分（その極小を含

む）はまったく関係しない。

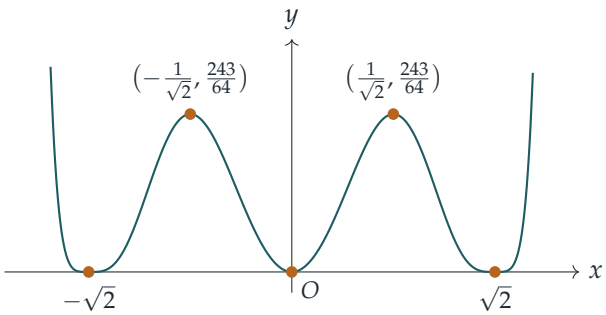
合成関数の微分法（chain rule）により

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x\,f'(x^2) = 2x\,(x^2-2)^3(3x^2+2)(2x^2-1),$$

であり、これは $x=0$、$x^2=\frac{1}{2}$、$x^2=2$ のときに 0 となる（因数 $3x^2+2$ は決して 0 にならない）。$u \geq 0$ において、f は 0 から $u=\frac{1}{2}$ での極大まで増加し、$u=2$ で 0 まで減少し、その後はどこまでも増加する。そして $x \geq 0$ では $u=x^2$ はこの順序を保つ。よって停留点は次のとおりである。

- $(0,0)$ で極小であり、そこでは $y \approx 16x^2$ である。
- $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{243}{64}\right)$ で極大である。
- $(\pm\sqrt{2}, 0)$ で極小であり、曲線はそこで非常に平らに軸に接する。実際 $y \approx 384\,(x \mp \sqrt{2})^4$ である。

$|x|$ が大きいとき $y \approx x^{12}$ であり、非常に急激に増加する。



検算

導関数の簡単な確認として、$x=0$ では $f(x) = x(x+1)(x-2)^4 \approx 16x$ であり、確かに $f'(0) = (-8)(2)(-1) = 16$ となる。数値的な確認により、f' の因数分解が無作為に選んだ点での有限差分（finite-difference）による導関数の値と一致すること、$f(-\frac{2}{3}) \approx -11.237$、$f(\frac{1}{2}) = 3.796875$ であること、そして $[0,2]$ における $\sqrt{f}$ の最大値が $x=0.5$ での $1.94856\ldots = \frac{9\sqrt{3}}{8}$ であることがわかる。(ii) については、予想どおり $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ は $x \approx \pm 0.707$ と ± 1.414（および 0）で符号を変える。

よくある間違い

- 微分する前に f を展開してしまうこと。そうすると f' は因数の見えない五次式（quintic）になる。$(x-2)^3$ を外に出したままにしておけば、解くべきものは二次式だけになる。
- (i) で、$(0,0)$ や $(-1,0)$ に尖点（cusp）や角を描いてしまうこと。f の単根では、$y^2 = f(x)$ の接線は鉛直である。
- (ii) で、C の $x = -\frac{2}{3}$ における極小をそのまま写してしまうこと。$x^2 \geq 0$ なので、使われるのは C の $x \geq 0$ の部分だけであり、y が負になることはない。

STEP のその先へ

f の根の近くでの $y^2 = f(x)$ のふるまいは、代数曲線（algebraic curves）の特異点（singular points）の研究の出発点である。単根からは鉛直な接線をもつ滑らかな点が得られ、重根からは $(2,0)$ のように二本の枝が出会う場所が得られる。f が三次式のとき、曲線 $y^2 = f(x)$ は**楕円曲線**（*elliptic curves*）であり、現代の数論（number theory）において中心的な役割を果たす。曲線の概形を描くことの土台となる微積分（単調性（monotonicity）、導関数の符号、合成関数の微分法）の丁寧な扱いについては、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門の教科書）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。