解答例

STEP II 2004、第 2 問

純粋数学 • 2 次不等式

> **STEP II 2004、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q2

鍵となる考え方

扱いにくいのは絶対値（modulus）だけであり、それは $t = |x|$ とおけば消える。$x^2 = |x|^2$ であるから、不等式は t についての普通の二次不等式（quadratic inequality）に、条件 $t \geq 0$ が加わったものになる。あとは平方完成（completing the square）するか、判別式（discriminant）を調べれば、すべてがわかる。t の許される区間一つひとつから、原点の両側に一つずつ、**二つの** x の区間が得られる。

解答

以下つねに $t = |x| \geq 0$ とおく。$x^2 = t^2$ であるから、不等式 $(*)$ はちょうど次のことを意味する。

$$q(t) = t^2 - \alpha t + 2 < 0, \qquad t = |x| \geq 0.$$

$|\alpha| < 2\sqrt{2}$ のとき解をもたないこと

平方完成すると

$$q(t) = \left(t - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + 2 - \frac{\alpha^2}{4}.$$

$|\alpha| < 2\sqrt{2}$ ならば $\alpha^2 < 8$ であるから、$2 - \frac{\alpha^2}{4} > 0$ である。平方の項は決して負にならないので、**すべての**実数 t に対して $q(t) > 0$ であり、特に $t = |x|$ に対してもそうである。したがって、すべての x に対して $x^2 - \alpha|x| + 2 > 0$ となり、$(*)$ を満たす x の値は存在しない。

$\alpha = 3$ の場合

このとき $q(t) = t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$ であり、これが負になるのはちょうど $1 < t < 2$ のときである。よって $(*)$ が成り立つのは $1 < |x| < 2$ のとき、かつそのときに限り、解の集合は

$$\{x : -2 < x < -1\} \cup \{x : 1 < x < 2\}.$$

である。

長さの和 S

$\alpha > 2\sqrt{2}$ とする。すると $\alpha^2 > 8$ であるから、q は相異なる二つの実数解

$$t_1 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 8}}{2}, \qquad t_2 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 8}}{2},$$

をもち、q の最高次の係数（leading coefficient）は正であるから、$q(t) < 0$ となるのはちょうど $t_1 < t < t_2$ のときである。

> **考えてみよう** 区間 $t_1 < t < t_2$ の一部が負の t の範囲にかかっている心配はないだろうか？

その心配はない。二つの解の積は $t_1 t_2 = 2 > 0$、和は $t_1 + t_2 = \alpha > 0$ であるから、どちらも正である。したがって区間 (t_1, t_2) 全体が $t > 0$ に含まれ、そこに属する t の値はすべて、実際に $|x|$ がとりうる値である。

よって $(*)$ が成り立つのは $t_1 < |x| < t_2$ のとき、かつそのときに限る。すなわち

$$-t_2 < x < -t_1 \qquad \text{または} \qquad t_1 < x < t_2.$$

である。これらは（$t_1 > 0$ であるから）共通部分をもたない二つの区間であり、どちらも長さは $t_2 - t_1 = \sqrt{\alpha^2 - 8}$ である。したがって

$$S = 2\sqrt{\alpha^2 - 8}.$$

$\alpha^2 - 8 < \alpha^2$ かつ $\alpha > 0$ であるから、正の平方根をとると $\sqrt{\alpha^2 - 8} < \alpha$ となり、

$$S < 2\alpha,$$

が示された。

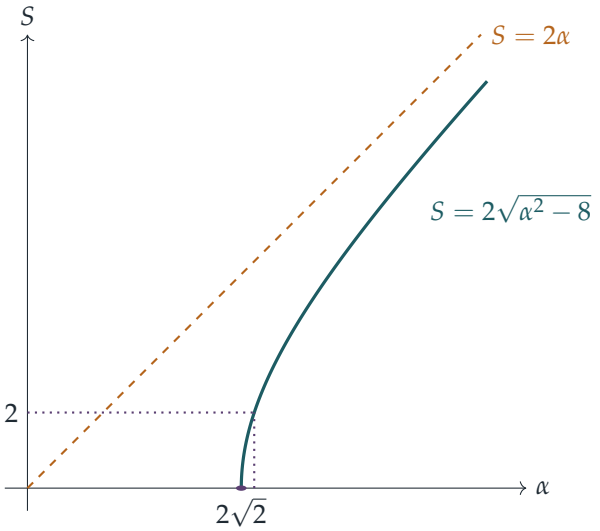
S を α の関数として描いたグラフ

関数 $S = 2\sqrt{\alpha^2 - 8}$ は $\alpha > 2\sqrt{2}$ で定義される（$\alpha \le 2\sqrt{2}$ のときは区間がまったく存在しない。$\alpha = 2\sqrt{2}$ では $q(t) = (t - \sqrt{2})^2 \ge 0$ となり、$\alpha \le 0$ のときはつねにすべての $t \ge 0$ に対して $q(t) \ge 2$ となる）。主な特徴は次のとおりである。

- $\alpha \to 2\sqrt{2}^{+}$ のとき $S \to 0$ であり、$\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha} = \dfrac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2-8}}$ はそこで無限大に発散する。つまり曲線は点 $(2\sqrt{2}, 0)$ から鉛直な接線（vertical tangent）をもって始まる。
- S は増加関数であり、$\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}\alpha^2} = -\dfrac{16}{(\alpha^2-8)^{3/2}} < 0$ であるから、曲線は上に凸（concave）である。
- 直線 $S = 2\alpha$ は漸近線（asymptote）であり、曲線は下側からこれに近づく。実際、$(2\alpha - S)(2\alpha + S) = 4\alpha^2 - 4(\alpha^2-8) = 32$ であるから

$$2\alpha - S = \frac{32}{2\alpha + S} \to 0 \quad \text{極限}\alpha \to \infty.$$

実は $\frac{\alpha^2}{8} - \frac{S^2}{32} = 1$ が成り立つので、このグラフは漸近線 $S = 2\alpha$ をもつ双曲線（hyperbola）の 4 分の 1 である。



検算

- $\alpha = 3$ のとき公式は $S = 2\sqrt{1} = 2$ を与え、それぞれ長さ 1 の二つの区間 $(-2,-1)$ と $(1,2)$ に一致する（グラフ上の $\alpha = 3$ における点線の点）。
- $\alpha = 5$ のとき $S = 2\sqrt{17} \approx 8.246$ である。$[-20, 20]$ の中で $x^2 - 5|x| + 2 < 0$ となる x の集合を数値的に測ると同じ値が得られ、$2\alpha = 10$ を十分下回っている。
- α が大きいとき $2\alpha - S \approx 8/\alpha$ である。$\alpha = 100$ ではその差は $0.0800\ldots$ となる。

よくある間違い

- $|x|$ の各区間から x の区間が二つずつ得られることを忘れ、$S = \sqrt{\alpha^2 - 8}$ としてしまう。
- $\alpha = 3$ の答えを $1 < x < 2$ だけにして、負の側の半分を落としてしまう。
- t についての二つの解がともに正であることを確かめずに判別式を使ってしまう。$\alpha < 0$ のときは、判別式の条件は同じでも解が負になるので、解はまったく存在しない。

STEP のその先へ

関数 $x \mapsto x^2 - \alpha|x| + 2$ は偶関数（even function）であるから、その解の集合は対称であり、長さ S はこの関数が負になる集合の**測度**（measure）である。不等式で定められた集合の大きさを測ることは、大学 2 年次の解析学で学ぶ測度論（measure theory）とルベーグ積分（Lebesgue integration）の出発点である。ここで用いた極限、導関数、不等式の丁寧な扱いについては、Abbott, *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）を読むとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。