解答例

STEP II 2004、第 14 問

確率・統計 ・ 包除原理

> **STEP II 2004、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q14

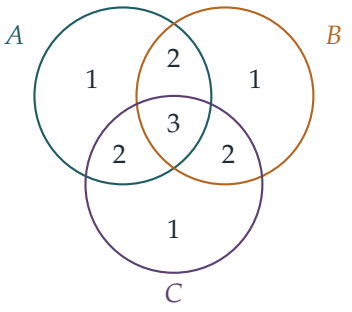
鍵となる考え方

包除原理（inclusion–exclusion principle）は数え方の補正である。$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$ と足し合わせると重なりの部分を余分に数えてしまうので、2 つずつの積事象の項と 3 つの積事象の項によってその数を正しく直すのである。プディングの問題では**余事象**（complement）を考えるほうがはるかに扱いやすい。E_i をプディング i が空である事象とする。**いずれかの**プディングが空である確率は和事象（union）の確率であり、これはまさに包除原理が扱うものである。しかも E_i たちの積事象（intersection）の確率はどれも非常に簡単である。

解答

包除原理の公式

$A\cup B\cup C$ をベン図（Venn diagram）の互いに素（disjoint）な 7 つの領域に分ける。いくつかの領域をまるごと合わせてできる事象の確率は、それらの領域の確率の和である。したがって、右辺で各領域がちょうど 1 回ずつ数えられていることを確かめれば十分である。



図中の数は、各領域が A、B、C のうちいくつに含まれるかを表している。3 つの事象のうちちょうど k 個に含まれる領域を考える。ただし $k = 1$、2、3 である。

- この領域は、項 $\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B), \mathrm{P}(C)$ のうち k 個に現れる。
- この領域は、2 つずつの積事象のうち $\binom{k}{2}$ 個に現れる。たとえば $A \cap B$ に含まれるのは、A と B の両方に含まれるとき、かつそのときに限るからである。
- この領域が 3 つの積事象に現れるのは $k = 3$ のときだけであり、すなわち $\binom{k}{3}$ 回である。

よって、この領域が差し引きで数えられる回数は

$$k - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} = \begin{cases} 1 - 0 + 0 = 1 & (k = 1), \\ 2 - 1 + 0 = 1 & (k = 2), \\ 3 - 3 + 1 = 1 & (k = 3). \end{cases}$$

である。$A \cup B \cup C$ のどの領域もちょうど 1 回ずつ数えられ、和事象の外の領域は一度も数えられない。したがって右辺は $\mathrm{P}(A \cup B \cup C)$ に等しい。

（同じことであるが、2 つの事象についての規則 $\mathrm{P}(X \cup Y) = \mathrm{P}(X) + \mathrm{P}(Y) - \mathrm{P}(X \cap Y)$ を $X = A \cup B$、$Y = C$ に適用し、さらに $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ にも適用してもよい。）

どのプディングにも少なくとも 1 枚の 6 ペンス硬貨が入る

モデル。よくかき混ぜてから等分するということは、各 6 ペンス硬貨（sixpence）がプディング 1、2、3 のそれぞれにそれぞれ確率 $\frac{1}{3}$ で入り、しかも他の硬貨とは独立（independent）であるということである。$r \geq 1$ とする。

E_i をプディング i に 6 ペンス硬貨が 1 枚も入っていない事象とする。

- E_1 が起こるのは、r 枚の硬貨のどれもがプディング 1 を避けるときである。各硬貨がそうなる確率は $\frac{2}{3}$ なので、独立性より $\mathrm{P}(E_1) = \left(\frac{2}{3}\right)^r$ であり、E_2、E_3 についても同様である。

- $E_1 \cap E_2$ が起こるのは、すべての硬貨がプディング 3 に入るときなので、$\mathrm{P}(E_1 \cap E_2) = \left(\frac{1}{3}\right)^r$ であり、他の組についても同様である。
- $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ が起こるには 3 つのプディングがすべて空でなければならないが、$r \geq 1$ なのでこれは不可能である。よってその確率は 0 である。

包除原理より、少なくとも 1 つのプディングが空である確率は

$$p_r = \mathrm{P}(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = 3\left(\tfrac{2}{3}\right)^r - 3\left(\tfrac{1}{3}\right)^r.$$

である。どのプディングにも少なくとも 1 枚の硬貨が入る確率はその余事象の確率であり、

$$1 - 3\left(\tfrac{2}{3}\right)^r + 3\left(\tfrac{1}{3}\right)^r = \frac{3^r - 3\cdot 2^r + 3}{3^r}.$$

となる。

少なくとも 6 枚の 6 ペンス硬貨

$p_r < \frac{1}{3}$ となる r の値を求めればよい。直接計算すると

$$p_5 = \frac{3\cdot 32 - 3}{243} = \frac{93}{243} = \frac{31}{81} > \frac{27}{81} = \frac{1}{3}, \qquad p_6 = \frac{3\cdot 64 - 3}{729} = \frac{189}{729} = \frac{7}{27} < \frac{9}{27} = \frac{1}{3}.$$

である。これより小さい r ではうまくいかないことを確かめるため、p_r が減少することを示す。$r \geq 1$ に対して

$$p_{r+1} - p_r = 3\left(\tfrac{2}{3}\right)^r\left(\tfrac{2}{3} - 1\right) - 3\left(\tfrac{1}{3}\right)^r\left(\tfrac{1}{3} - 1\right) = -\left(\tfrac{2}{3}\right)^r + 2\left(\tfrac{1}{3}\right)^r = \left(\tfrac{1}{3}\right)^r(2 - 2^r),$$

であり、これは $r = 1$ のとき 0、$r \geq 2$ のとき負である。よって $p_1 = p_2 \geq p_3 \geq p_4 \geq p_5 = \frac{31}{81}$ であり、$r \leq 5$ のすべての r について $p_r > \frac{1}{3}$ となる。($r = 0$ のときは、どのプディングも確実に空である。) したがって、いずれかのプディングに硬貨が入っていない確率が $\frac{1}{3}$ を下回るのは $r \geq 6$ のときに限る。さらに p_r は減少し続けるので、$r \geq 6$ のすべての r について実際に $p_r \leq p_6 < \frac{1}{3}$ となる。よって、題意のとおり、料理人は 6 枚以上の 6 ペンス硬貨を使わなければならない。

各プディングに 2 枚ずつ

ここで $r = 6$ とする。T を各プディングにちょうど 2 枚ずつ硬貨が入る事象、S を各プディングに少なくとも 1 枚の硬貨が入る事象とする。前の小問より

$$\mathrm{P}(S) = 1 - p_6 = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27}.$$

である。6 枚の (区別できる) 硬貨をプディングに振り分ける方法は $3^6 = 729$ 通りあり、これらは同様に確からしい。各プディングに 2 枚ずつ入る方法の数は、6 個のものをラベル付きの 3 つの組に 2 個ずつ分ける方法の数であり、$\frac{6!}{2!\,2!\,2!} = 90$ である。よって $\mathrm{P}(T) = \frac{90}{729} = \frac{10}{81}$ となる。

考えてみよう なぜ $\mathrm{P}(T \cap S)$ は単に $\mathrm{P}(T)$ になるのか。

どのプディングにも 2 枚ずつ硬貨が入っていれば、当然どのプディングにも少なくとも 1 枚は入っているので、$T \subseteq S$ であり $T \cap S = T$ である。したがって条件付き確率（conditional probability）は

$$\mathrm{P}(T \mid S) = \frac{\mathrm{P}(T)}{\mathrm{P}(S)} = \frac{10/81}{20/27} = \frac{10}{81} \cdot \frac{27}{20} = \frac{1}{6}.$$

である。

検算

$r = 1$ と $r = 2$ のとき、公式はどのプディングにも硬貨が入る確率として 0 を与えるが、これは正しい。3 個未満の硬貨で 3 つのプディングを満たすことはできないからである。$r = 3$ のとき公式は $\frac{27-24+3}{27} = \frac{2}{9}$ を与え、これは直接数えた $3!/3^3 = 6/27$ と一致する。$r \leq 9$ について 3^r 通りの振り分けをすべて正確に数え上げると公式と一致し、$p_5 = \frac{31}{81} \approx 0.383$ および $p_6 = \frac{7}{27} \approx 0.259$ が確認でき、最終的な答え $\frac{1}{6} \approx 0.167$ も得られる（200 000 個のプディングのシミュレーションでは 0.166 となった）。

よくある間違い

- 6 ペンス硬貨を区別できないものとして扱い、$6 = a + b + c$ と表す 28 通りの方法を同様に確からしいとして数えること。実際にはそうではない。$(2,2,2)$ は 90 通りの起こり方があるのに対し、$(6,0,0)$ は 1 通りしかない。
- $r = 6$ と $r = 5$ だけを調べること。「6 枚以上使わなければならない」を示すには、それより小さいすべての r でうまくいかないことも必要であり、だからこそ単調性（monotonicity）を示す段階が重要なのである。
- 3 つの積事象が空であることを忘れること、あるいは説明なしにその確率を $(0)^r$ としてしまうこと。

STEP のその先へ

n 個の事象に対する一般の包除原理は、すべての k 個の積事象についての交代和を用いるもので、$\sum_{j \geq 1} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} = 1$ を使えば、上と全く同じ数え上げの議論で証明できる。これを n 個のプディングに適用すると**全射**（surjection）の個数が数えられ、第 2 種スターリング数（Stirling numbers of the second kind）や、古典的なクーポンコレク

ター問題（coupon-collector problem）につながる。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、包除原理とこうした占有問題が展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。