解答例

STEP II 2004、第 11 問

力学 ・ 仕事率と抵抗

STEP II 2004、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

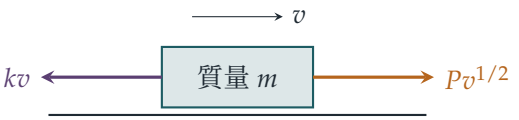
step.maths.org/questions/04-s2-q11

鍵となる考え方

仕事率（power）は力と速さの積である。したがって、全出力 $Pv^{3/2}$ で動いている機関は $Pv^{1/2}$ の力で列車を押す。ニュートン（Newton）の運動の第 2 法則から $\sqrt{v}$ を含む微分方程式（differential equation）が得られる。置換 $u = \sqrt{v}$ によって、これはすぐに解ける 1 階線形微分方程式（linear first-order equation）になる。機関を止めた後はそれぞれの速さが指数関数的に減衰する。小問 (iii) の要点は、二つの減衰率を比べることである。

解答

各列車を、まっすぐな水平の線路上を動く質点としてモデル化する。機関が全出力で動いている間、線路に沿ってはたらく力は駆動力と抵抗 kv である。



機関が速さ v で仕事率 H を出すとき、その駆動力は H/v である。よって全出力のとき、A にはたらく駆動力は $Pv^{3/2}/v = Pv^{1/2}$ であり、B にはたらく駆動力は $2Pv^{1/2}$ である。

小問 (i)

A について、線路方向の運動の第 2 法則から

$$m\frac{\mathrm{d}v_A}{\mathrm{d}t} = Pv_A^{1/2} - kv_A.$$

$u = v_A^{1/2}$ とおくと、$v_A = u^2$ かつ $\dfrac{\mathrm{d}v_A}{\mathrm{d}t} = 2u\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ である。すると

$$2mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Pu - ku^2, \qquad \text{よって} \qquad 2m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = P - ku,$$

となる。ここで u で割ったが、列車は常に動いている（$u > 0$）のでこれは許される。これは線形（かつ変数分離形（separable））である：

$$\int \frac{2m\,\mathrm{d}u}{P - ku} = \int \mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad -\frac{2m}{k}\ln(P - ku) = t + \text{定数},$$

したがって、ある定数 C を用いて $P - ku = Ce^{-kt/2m}$ となる。（u が非常に小さい最初の時点で $P - ku > 0$ であり、解は平衡（equilibrium）$u = P/k$ に決して到達しないので、正のままである。）

> **考えてみよう** 「非常に低速でのろのろ進んでいる」という条件から何がわかるか。

これは初期条件（initial condition）を与えている。$t = 0$ での速さは正である（したがって u で割ってよかった）が、無視できるほど小さいので、$t = 0$ で $u = 0$ とする。すると $C = P$ であり、

$$u = \frac{P}{k}\left(1 - e^{-kt/2m}\right), \qquad \text{よって} \qquad v_A = \frac{P^2\left(1 - e^{-kt/2m}\right)^2}{k^2},$$

となり、求める式が得られた。（もし列車がちょうど静止していたら、駆動力がまったくないので、$v \equiv 0$ ももとの方程式を満たしてしまう。問題文で列車がすでにゆっくり動いているとしているのはこのためである。）

B についての方程式は $2m\dfrac{\mathrm{d}v_B}{\mathrm{d}t} = 2Pv_B^{1/2} - kv_B$ である。同じ置換により $4m\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2P - ku$ となり、これは A の方程式で P を $2P$ に、m を $2m$ に置き換えたものである。よって

$$v_B = \frac{4P^2\left(1 - e^{-kt/4m}\right)^2}{k^2}.$$

小問 (ii)

二つの速さはともに正なので、$9v_A = 4v_B$ は $3\sqrt{v_A} = 2\sqrt{v_B}$ と同値である。$x = e^{-kt/4m}$ とおくと、$e^{-kt/2m} = x^2$ であり、$t > 0$ のとき $0 < x < 1$ である。条件は

$$\frac{3P}{k}\left(1 - x^2\right) = \frac{4P}{k}(1 - x) \quad \Longrightarrow \quad 3(1 - x)(1 + x) = 4(1 - x).$$

となる。$x \neq 1$ なので $1-x$ で割ってよく、$3+3x=4$、すなわち $x=\frac{1}{3}$（つまり $t=\frac{4m}{k}\ln 3$）を得る。このとき $1-x^2=\frac{8}{9}$、$1-x=\frac{2}{3}$ なので

$$v_A=\frac{64P^2}{81k^2},\qquad v_B=\frac{16P^2}{9k^2}.$$

簡単な確認として、$9v_A=\frac{64P^2}{9k^2}=4v_B$ である。

小問 (iii)

機関を止めた瞬間から時間 τ を測り、その瞬間の速さを $V_A=\frac{64P^2}{81k^2}$、$V_B=\frac{16P^2}{9k^2}$ とする。このとき抵抗だけがはたらくので

$$m\frac{\mathrm{d}v_A}{\mathrm{d}\tau}=-kv_A,\qquad 2m\frac{\mathrm{d}v_B}{\mathrm{d}\tau}=-kv_B,$$

よって

$$v_A=V_A\,\mathrm{e}^{-k\tau/m},\qquad v_B=V_B\,\mathrm{e}^{-k\tau/2m}.$$

重いほうの列車 B は半分の指数減衰率で速さを失うので、v_B を 2 乗すれば指数関数が一致する：

$$v_B^2=V_B^2\,\mathrm{e}^{-k\tau/m}=\frac{V_B^2}{V_A}\,v_A.$$

最後に

$$\frac{V_B^2}{V_A}=\frac{256P^4}{81k^4}\cdot\frac{81k^2}{64P^2}=\frac{4P^2}{k^2},$$

であるから $v_B^2=\dfrac{4P^2}{k^2}v_A$、すなわちその後のすべての時刻で $k^2v_B^2=4P^2v_A$ が成り立ち、求める結果が得られた。

検算

- $t\to\infty$ のとき $v_A\to P^2/k^2$ であり、これは駆動力 $Pv^{1/2}$ が抵抗 kv と等しくなる速さである。同様に $v_B\to 4P^2/k^2$ であり、これは $2Pv^{1/2}=kv$ となる速さである。
- t が小さいとき $v_A\approx P^2t^2/(4m^2)$、$v_B\approx P^2t^2/(4m^2)$ である。つまり二つの列車は並んで動き出す。どちらも単位質量あたりの駆動力が $Pv^{1/2}/m$ なので、当然そうなるはずである。
- $m=1.7$、$P=2.3$、$k=0.9$ として、二つの運動方程式を非常に小さな初速から数値的に（ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta）で）解き進めたところ、小問 (i) の式と約 10^{-5} の精度で一致した。$9v_A=4v_B$ となる瞬間には $\mathrm{e}^{-kt/4m}=0.33333$、$v_A=5.1602$、$v_B=11.6104$ となり、機関を止めてさらに解き進めても $k^2v_B^2$ は $4P^2v_A$ と等しいままであった（たとえば 2 秒後にはどちらも 37.8739）。

よくある間違い

- $Pv^{3/2}$ を力として使ってしまう。これは仕事率であり、力は仕事率を速さで割ったものである。
- 小問 (ii) の条件が $x = \mathrm{e}^{-kt/4m}$ の 2 次方程式であり、$x = \frac{1}{3}$ のほかに根 $x = 1$（すなわち両方の速さが 0 である $t = 0$）をもつことを忘れる。

STEP のその先へ

置換 $u = \sqrt{v}$ は、ベルヌーイ型微分方程式（Bernoulli equation）$y' + p(t)y = q(t)y^n$ の解法の特別な場合である。この方程式では $u = y^{1-n}$ とおくと必ず線形方程式が得られる。列車がちょうど静止している場合についての注意は、解の一意性（uniqueness）の理論への最初の入り口である。$\sqrt{v}$ は $v = 0$ で傾きが無限大になるので、この方程式は $v = 0$ から出発する解を二つ以上もつ。このことはピカール・リンデレーフの定理（Picard–Lindelöf theorem）によって説明される。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）は両方の話題を扱っている。仕事率と抵抗の力学については、Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。