解答例

STEP II 2004、第 10 問

力学 ・ 斜面上の摩擦

> **STEP II 2004、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q10

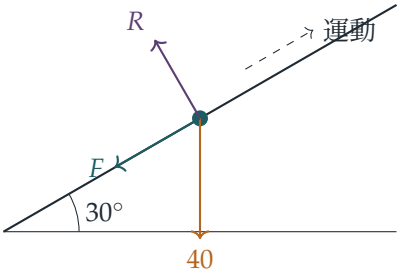
鍵となる考え方

摩擦（friction）は常に運動を妨げる向きにはたらくので、斜面を上る粒子と下る粒子とでは加速度（acceleration）が異なる。まず二つの加速度を求めよう。数値は、それらがとてもきれいな値になるように選ばれている。そのうえで、P は上って止まり、引き返して下ってきて、まだ上っている途中の Q と出会う。両者の位置を「最高点から下に測った距離」として書くと、衝突の方程式は平方の差（difference of two squares）の形になる。

（印刷された問題には小問 (i) に誤植があり、衝突時刻の式中の「b」は T が正しい。）

解答

各粒子を粗い斜面（rough plane）上の質点としてモデル化し、位置 x を A から ℓ に沿って上向きに測り、斜面を上る向きを正とする。



斜面に垂直な方向には加速度がないので、垂直抗力（normal reaction）は

$$R = 4 \cdot 10 \cos 30^\circ = 20\sqrt{3}\ \mathrm{N},$$

であり、各粒子は滑っているので、摩擦力は限界摩擦力（limiting friction）である：

$$F = \mu R = \frac{1}{5\sqrt{3}} \cdot 20\sqrt{3} = 4\,\mathrm{N}.$$

重力の斜面下向きの成分は $40\sin 30^\circ = 20\,\mathrm{N}$ である。

上っているとき：摩擦力は斜面下向きにはたらくので $4a = -(20+4)$ となり、減速度（deceleration）は $6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ である。

下っているとき：摩擦力は斜面上向きにはたらくので、斜面下向きの加速度は $(20-4)/4 = 4\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ である。

$20 > 4$ であるから、静止した粒子はそのまま静止し続けることはない。限界摩擦力では粒子を支えきれず、粒子は滑り落ちる。

小問 (i)

P の運動。上りでは $v = 6 - 6t$ であるから、P は $t = 1$ で止まり、それまでに $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 = 3\,\mathrm{m}$ 進む。$0 \le t \le 1$ では $x_P = 6t - 3t^2 = 3 - 3(1-t)^2$ である。その後 P は $x = 3$ から静止状態で加速度 4 で滑り下りるので、

$$x_P = 3 - 2(t-1)^2 \qquad (t \ge 1),$$

であり、これは P が A に戻るまで、すなわち $2(t-1)^2 = 3$ となる $t = 1 + \sqrt{3/2}$ まで成り立つ。

Q の運動。T だけずらしたまったく同じ運動である。$u = t - T$ とおくと、

$$x_Q = 6u - 3u^2 = 3 - 3(1-u)^2 \qquad (0 \le u \le 1).$$

考えてみよう 両方がまだ上っている間に衝突することはありうるか？

ありえない。両方が上っている間、Q は P が T 秒前にたどった経路をそのままたどり、その経路に沿って x は増加するので、P が常に前にいる。両者が出会えるのは P が折り返した後、すなわち $t \ge 1$ のときに限られる。また、Q が先に自身の最高点（$u = 1$ における $x = 3$）に達することもない。そのときまでに P はすでに $x = 3$ を離れ、それより下にいるからである。したがって、衝突の時点で P は下っており、Q は上っている。

衝突。P が折り返してからの時間を $\tau = t - 1 \ge 0$ とおく。すると $1 - u = 1 - (t - T) = T - \tau$ であり、$x_P = x_Q$ より

$$2\tau^2 = 3(T - \tau)^2.$$

τ と $T - \tau = 1 - u$ はどちらも非負である（後者は Q がまだ上っているから）ので、正

の平方根をとってよい：

$$\sqrt{2}\,\tau = \sqrt{3}\,(T-\tau)$$
$$\tau = \frac{\sqrt{3}\,T}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})\,T = (3-\sqrt{6})\,T,$$

ここで $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 1$ を用いて有理化（rationalising）した。よって衝突は P が打ち出されてから

$$t = (3-\sqrt{6})\,T + 1$$

秒後に起こり、題意は示された。

あとは T に関する条件がどこで使われるかを確かめればよい。この時刻は P が A に戻る前でなければならないので、$\tau < \sqrt{3/2}$ が必要である：

$$(3-\sqrt{6})\,T < \sqrt{\tfrac{3}{2}} \iff T < \frac{\sqrt{3/2}\,(3+\sqrt{6})}{3} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} + \tfrac{\sqrt{9}}{3} = 1+\sqrt{\tfrac{3}{2}},$$

ここで $\sqrt{3/2}\cdot\sqrt{6} = 3$ を用いた。これはまさに与えられた条件である。（同じ不等式により $t \geq T$ も保証され、Q がすでに打ち出されていることがわかる：$(3-\sqrt{6})T+1 \geq T \iff T \leq 1/(\sqrt{6}-2) = 1+\sqrt{3/2}$。）

小問 (ii)

$T = 1+\sqrt{2/3}$ のとき、

$$\tau = (3-\sqrt{6})\left(1+\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) = 3-\sqrt{6}+3\sqrt{\tfrac{2}{3}}-\sqrt{6}\sqrt{\tfrac{2}{3}} = 3-\sqrt{6}+\sqrt{6}-2 = 1,$$

であるから、衝突は $t = 2$ で起こる。この T の値は $1+\sqrt{3/2}$ より小さいので、小問 (i) の結果が適用できる。

摩擦力の大きさは一定の 4 N で、常に運動を妨げる向きにはたらくので、摩擦によって失われるエネルギーは、摩擦力と滑った総距離の積である。

- P は 3 m 上り、その後 $2\tau^2 = 2$ m 下る。合計 5 m である。
- Q はまだ折り返しておらず、P と同じ点、すなわち $x = 3-2 = 1$ にいる。Q が滑った距離は 1 m である。

よって失われるエネルギーは

$$4\times(5+1) = 24\,\text{J}.$$

検算

エネルギー収支によってこれを確かめられる。はじめの運動エネルギー（kinetic energy）は $2\times\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6^2 = 144\,\text{J}$ である。$t = 2$ において、P の速さは $4\times 1 = 4$（運動エ

ネルギー 32 J）であり、Q は $u = 1 - \sqrt{2/3}$ で速さ $6(1-u) = 6\sqrt{2/3}$ なので $v^2 = 24$（運動エネルギー 48 J）である。両者とも斜面に沿って 1 m 上にあり、高さは $\frac{1}{2}$ m 高いので、位置エネルギー（potential energy）は $2 \times 4 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 40$ J 増加している。そして $144 - 32 - 48 - 40 = 24$ J となる。また、$T < 1 + \sqrt{3/2}$ を満たすランダムな T について両粒子の運動を逐次的に数値シミュレーションしたところ、衝突時刻は $(3 - \sqrt{6})T + 1$ と一致し（たとえば $T \approx 1.816$ のとき ≈ 2.000）、摩擦によって失われたエネルギーは 24.000 J であった。

よくある間違い

- P の下りでも上りと同じ加速度を使ってしまう。摩擦力の向きが逆になるので、加速度は 6 ではなく 4 である。
- Q にはたらく摩擦を忘れる。Q も滑っており、その 1 m 分が 4 J に寄与する。
- $2\tau^2 = 3(T-\tau)^2$ で誤った平方根をとる。符号は $\tau \geq 0$ と $T - \tau \geq 0$ によって決まる。

STEP のその先へ

摩擦は非保存力（non-conservative force）の最も簡単な例である。摩擦がする仕事は端点だけでなく経路に依存する。だからこそ、変位ではなく滑った総距離が必要だったのである。ある系では力学的エネルギー（mechanical energy）が保存され、別の系では保存されないのはこのためであり、この考え方は大学 1 年次の力学の講義で、線積分（line integral）とポテンシャル（potential）を用いて厳密に定式化される。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（『力学入門』）は、仕事、保存力、摩擦を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。