解答例

STEP II 2004、第 1 問

純粋数学 • 根号を含む方程式

> **STEP II 2004、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q1

鍵となる考え方

どの方程式にも $\sqrt{x}$ と $\sqrt{3x^2+1}$ が含まれているので、$t=\sqrt{x}$（ただし $t\geq 0$）とおいて前者を多項式（polynomial）に直す。次に残った平方根だけを一方の辺に分離し、1 回だけ 2 乗する。結果は t の 4 次方程式（quartic）となり、$t=0$ と $t=1$ がつねに解になるので容易に因数分解（factorise）できる。本当の作業は最後にある。2 乗によって無縁解（false root）が紛れ込むことがあるので、2 乗した辺が負でなかった解だけを残すのである。

解答

3 つの方程式はいずれも、$\sqrt{x}$ が実数であるために $x\geq 0$ を必要とする。そこで $t\geq 0$ として $x=t^2$ とおく。すると $\sqrt{x}=t$、$3x^2+1=3t^4+1$ である。

2 乗する操作は一方向にしか成り立たない。実数 A, B に対して

$$\sqrt{A}=B \iff A=B^2 \text{ かつ} B\geq 0.$$

したがって、2 乗した後には各解において右辺が負でないことを確かめなければならない。

小問 (i)

平方根を分離すると

$$\sqrt{3t^4+1}=2t^2-t+1.$$

右辺はつねに正である。実際、判別式（discriminant）は $1-8<0$ であり、最高次の係数（leading coefficient）は正である。よってここでは 2 乗しても何も失われず、2 乗

した方程式の解はすべて本当の解である。2 乗すると

$$3t^4+1=(2t^2-t+1)^2=4t^4-4t^3+5t^2-2t+1,$$
$$0=t^4-4t^3+5t^2-2t=t\,(t^3-4t^2+5t-2).$$

この 3 次式（cubic）は $t=1$ で 0 になる（$1-4+5-2=0$ だからである）。因数 $t-1$ で割ると

$$t^3-4t^2+5t-2=(t-1)(t^2-3t+2)=(t-1)^2(t-2).$$

よって $t\,(t-1)^2(t-2)=0$ となり、$t=0,1,2$ を得る。3 つとも負でないので

$$x=0,\quad x=1,\quad x=4.$$

検算として、$x=4$ のとき $\sqrt{49}+2-8-1=0$ となる。

小問 (ii)

今度は

$$\sqrt{3t^4+1}=-t^2+2t+1.$$

2 乗すると

$$3t^4+1=(-t^2+2t+1)^2=t^4-4t^3+2t^2+4t+1,$$
$$0=2t^4+4t^3-2t^2-4t=2t\,(t^3+2t^2-t-2).$$

3 次式の項を $t^2(t+2)-(t+2)$ とまとめると

$$2t\,(t+2)(t-1)(t+1)=0.$$

$t\geq 0$ であるから、残るのは $t=0$ と $t=1$ だけである。そこでの右辺 $-t^2+2t+1$ の値はそれぞれ 1 と 2 で、どちらも正であるから、両方とも本当の解である：

$$x=0,\quad x=1.$$

小問 (iii)

今回は

$$\sqrt{3t^4+1}=t^2+2t-1.$$

2 乗すると

$$3t^4+1=(t^2+2t-1)^2=t^4+4t^3+2t^2-4t+1,$$
$$0=2t^4-4t^3-2t^2+4t=2t\,(t^3-2t^2-t+2).$$

3 次式を $t^2(t-2)-(t-2)$ とまとめると

$$2t\,(t-2)(t-1)(t+1)=0.$$

負でない解は $t=0,1,2$ である。

考えてみよう これら 3 つの値はすべて元の方程式を満たすだろうか？

満たさない。$t=0$ のとき右辺 t^2+2t-1 は -1 となるが、平方根が負になることはない。よって $t=0$ は 2 乗によって紛れ込んだ無縁解である。（直接確かめると、$x=0$ のとき (iii) の左辺は $1-0-0+1=2\neq 0$ である。）$t=1$ と $t=2$ のとき右辺は 2 と 7 で、どちらも正であるから、これらは本当の解である。したがって

$$x=1,\quad x=4.$$

(ii) と (iii) の間にはうまい関係がある。t を $-t$ に置き換えると $-t^2+2t+1$ は $-(t^2+2t-1)$ になり、2 乗するとマイナス符号は消える。よって (iii) の 2 乗した方程式は、(ii) の 2 乗した方程式の t を $-t$ に置き換えたものであり、その解 $0,\pm1,2$ は (ii) の解 $0,\pm1,-2$ の符号を反転したものになっている。

検算

各答えを元の方程式に代入する。たとえば (iii) に $x=4$ を代入すると $\sqrt{49}-4-4+1=0$ となる。$0\le x\le 50$ の範囲で各左辺を細かく数値的に調べたが、ほかに零点は見つからなかった。(i) では左辺は $x=1$ で符号を変えずに 0 に接しており、これは重複因数 $(t-1)^2$ と合致している。

よくある間違い

- 2 乗する辺の符号を確かめ忘れ、(iii) で $x=0$ を残してしまう。
- t（あるいは $\sqrt{x}$）で割ってしまい、(i) と (ii) で解 $x=0$ を失う。
- 一方の辺に平方根が 2 つ残ったまま 2 乗する。先に $\sqrt{3x^2+1}$ を分離し、1 回の 2 乗で平方根が消えるようにすること。

STEP のその先へ

写像 $A\mapsto A^2$ は $\mathbb{R}$ 上で単射（injective）ではないので、両辺を 2 乗して得られるのは含意であって、同値（equivalence）ではない。どの変形が逆にたどれるかを把握して

おくことは、方程式を注意深く解くときに欠かせない習慣であり、解析学では、関数がいつ、どの定義域（domain）で逆関数（inverse）をもつかという問題になる。Bartle と Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は、この点を丁寧に解説している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。