解答例

STEP I 2004、第 9 問

力学 ・ 放物運動

> **STEP I 2004、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q9

鍵となる考え方

前半は、「最高点では鉛直方向の速度が 0 になる」という標準的な計算である。トンネルの問題では、速さ u は与えられていないが、自由に選べるわけでもない。θ を決めると、軌道が P を通るという条件によって u が定まる。そこで u を消去し、最高点の高さを θ だけの関数として（$t = \tan\theta$ を用いて表すのがよい）書き表し、それが天井より低くなるのはどのようなときかを調べる。答えは t についての 2 次不等式（quadratic inequality）として得られる。

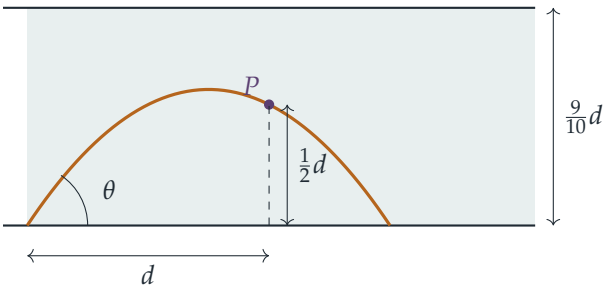
解答

最高点の高さ

粒子を、空気抵抗のない状態で重力のみを受けて自由に運動する質点とみなす。投射点を原点とし、x 軸を水平方向、y 軸を鉛直上向きにとる。速度の鉛直成分は初め $u\sin\theta$ であり、一定の加速度 $-g$ を受ける。最高点では鉛直方向の速度が 0 になるので、鉛直方向に $v^2 = v_0^2 + 2as$ を用いると、

$$0 = u^2\sin^2\theta - 2gH, \qquad \text{よって} \qquad H = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}.$$

トンネル



粒子の軌道（trajectory）は、$x = uT\cos\theta$ と $y = uT\sin\theta - \frac{1}{2}gT^2$ から時刻 T を消去して得られる。

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta} = xt - \frac{gx^2(1+t^2)}{2u^2},$$

ここで $t = \tan\theta$ とおき、$\sec^2\theta = 1 + t^2$ を用いた。

P を通る条件。 $x = d$、$y = \frac{1}{2}d$ を代入して d で割ると、

$$\frac{1}{2} = t - \frac{gd(1+t^2)}{2u^2}, \qquad \text{よって} \qquad \frac{gd(1+t^2)}{2u^2} = t - \frac{1}{2}.$$

左辺は正であるから、$t > \frac{1}{2}$ でなければならない。（これは納得のいく結果である。粒子は θ の方向へ動き出し、重力は軌道を下向きに曲げるだけなので、P に到達できるのは、P へ向かう傾き $\frac{1}{2}$ の直線より上に向けて投げた場合に限られる。）このような各 θ に対して、条件を満たす速さはただ一つ存在し、

$$u^2 = \frac{gd(1+t^2)}{2t-1}.$$

考えてみよう 問題では u の値が与えられていない。それなのに、なぜ条件が θ だけで表せるのだろうか。

速さは自分で選べるものではないからである。θ を固定すると、「P を通る」という条件によって u が定まる。したがって、最高点の高さは実際には θ だけの関数である。

天井に当たらない条件。 H の式に $\sin^2\theta = \dfrac{t^2}{1+t^2}$ を用いると、

$$H = \frac{u^2}{2g}\cdot\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{d(1+t^2)}{2(2t-1)}\cdot\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{dt^2}{2(2t-1)}.$$

粒子が天井に当たらないのは、ちょうど $H < \frac{9}{10}d$ のときである。$2t-1>0$ であるから、不等号の向きを変えずに両辺に $10(2t-1)/d$ を掛けることができる。

$$\begin{aligned}\frac{dt^2}{2(2t-1)} < \frac{9d}{10} &\iff 5t^2 < 9(2t-1)\\ &\iff 5t^2-18t+9<0\\ &\iff (5t-3)(t-3)<0\\ &\iff \tfrac{3}{5}<t<3.\end{aligned}$$

この区間のすべての t は $t>\frac{1}{2}$ を満たすので、先の条件は新たな制約を加えない。$t=\frac{3}{5}$ または $t=3$ のときは粒子がちょうど天井に触れるので、これらは除外される。天井には決して当たらないので、粒子は床まで落下し、トンネルの中に着地する。

最後に、θ は 0 と $\frac{\pi}{2}$ の間にあり、この範囲で tan は増加関数であるから、

$$\arctan\tfrac{3}{5}<\theta<\arctan 3,$$

となり、示すべきことが得られた。

検算

- $t=3$ のとき $H=\dfrac{9d}{2\cdot 5}=\frac{9}{10}d$、$t=\frac{3}{5}$ のとき $H=\dfrac{(9/25)d}{2\cdot(1/5)}=\frac{9}{10}d$ である。どちらの端点でも粒子は天井をかすめる。これは予想どおりである。
- $t\to\frac{1}{2}^{+}$ のとき、必要な速さは $u\to\infty$ となり、$H\to\infty$ となる。粒子は P へ向かう直線にほぼ沿って進むので、非常に速くなければならず、その後非常に高くまで上昇する。
- 数値的に、$d=3$、$g=9.8$ として 10^5 個の角度を無作為に選んで検証した。それぞれについて u を求め、軌道が P を通ることを確かめたうえで、$H<\frac{9}{10}d$ となるのはちょうど $0.5404<\theta<1.2490$（すなわちラジアンで表した $\arctan 0.6$ と $\arctan 3$ の間）のときであることを確認した。また、逐次的なシミュレーションによって $H=u^2\sin^2\theta/(2g)$ も確かめた。

よくある間違い

- u を独立した未知数として扱い、行き詰まってしまう。u は P での条件を用いて消去しなければならない。
- 不等式の両辺に $2t-1$ を掛ける前に、その符号を確認し忘れる。

- P が天井より下にあることだけを確認してしまう。軌道の最高点はふつう P より後にあるので、問題になるのは最高点の高さである。

STEP のその先へ

軌道を $\tan\theta$ を用いて表すと、放物運動（projectile motion）の問題が t についての 2 次式の問題に変わる。同じ工夫によって、与えられた速さをもつすべての軌道の「包絡線」（envelope、軌道全体を囲む放物線）を求めることができ、また標的に命中させるための 2 通りの角度も得られる。この問題のように、一部のパラメータが制約によって定まり、残りが許される領域をなすような問題は、最適化（optimisation）や変分法（calculus of variations）へとつながっていく。この種の力学を学ぶ次の一歩としては、Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）が優れている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。