解答例

# STEP I 2004、第 8 問

純粋数学 • 単調数列と数学的帰納法

> **STEP I 2004、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q8

## 鍵となる考え方

数列が増加することを示すには、差 $t_{n+1} - t_n$ を $t_n$ の関数として調べればよい。どちらの小問でもこの差は因数分解でき、その因数はちょうど漸化式（recurrence relation）の不動点（fixed point）2 と 3（$t_{n+1} = t_n$ となる値）に対応している。したがって差の符号は $t_n$ が 2 と 3 に対してどこにあるかだけで決まり、本当になすべき仕事は、すべての項が適切な範囲にとどまることを数学的帰納法（induction）で示すことである。

## 解答

### 小問 (i)

任意の $n$ に対して

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2 + 6}{5} - x_n = \frac{x_n^2 - 5x_n + 6}{5} = \frac{(x_n - 2)(x_n - 3)}{5}.$$

$x_n > 3$ ならば両方の因数が正であるから $x_{n+1} - x_n > 0$、すなわち $x_{n+1} > x_n$ である。

残るのは**すべての**項が 3 より大きいことの確認であり、これを帰納法で示す。$n = 0$ のとき、$x_n > 3$ は仮定より成り立つ。$x_n > 3$ と仮定する。上の計算により $x_{n+1} > x_n > 3$ であるから、$x_{n+1} > 3$ も成り立つ。よってすべての $n \geq 0$ に対して $x_n > 3$ であり、したがってすべての $n \geq 0$ に対して $x_{n+1} > x_n$ となる。すなわち、この数列は狭義単調増加（strictly increasing）である。

> ? **考えてみよう** なぜ $x_1 > x_0$ を示すだけでは不十分なのか。

不等式 $x_{n+1} > x_n$ は $x_n > 3$ から導いたものなので、最初の一歩だけでなく各段階でそ

の条件が必要である。ここではそれが自動的に得られる。3 より大きいところから増加すれば、3 より大きいままだからである。（ちょうど $x_0 = 3$ から始めると定数列になるので、狭義の不等式であることが重要である。）

**小問 (ii)**

まず、$2 < y_n < 3$ ならば $y_n > 0$ であるから、$y_{n+1} = 5 - 6/y_n$ は定義されることに注意する。このような $y_n$ に対して

$$y_{n+1} - y_n = 5 - \frac{6}{y_n} - y_n = -\frac{y_n^2 - 5y_n + 6}{y_n} = \frac{(y_n - 2)(3 - y_n)}{y_n},$$

であり、$y_n - 2 > 0$、$3 - y_n > 0$、$y_n > 0$ よりこれは正である。したがって $2 < y_n < 3$ **であるならば** $y_{n+1} > y_n$ である。

小問 (i) と同様に、すべての項がこの区間にあることを示さなければならない。今回はそれが自動的には成り立たない。増加する数列は 3 を飛び越えてしまうかもしれないからである。そこで 3 からの距離を調べる。

$$3 - y_{n+1} = 3 - 5 + \frac{6}{y_n} = \frac{6 - 2y_n}{y_n} = \frac{2(3 - y_n)}{y_n}.$$

? **考えてみよう** 数列が決して 3 を飛び越えないことは、どうすればわかるか。

上の式は、$y_n > 0$ であれば $3 - y_{n+1}$ が $3 - y_n$ と同じ符号をもつことを示している。よって 3 より小さい項の次の項は、必ず 3 より小さい。

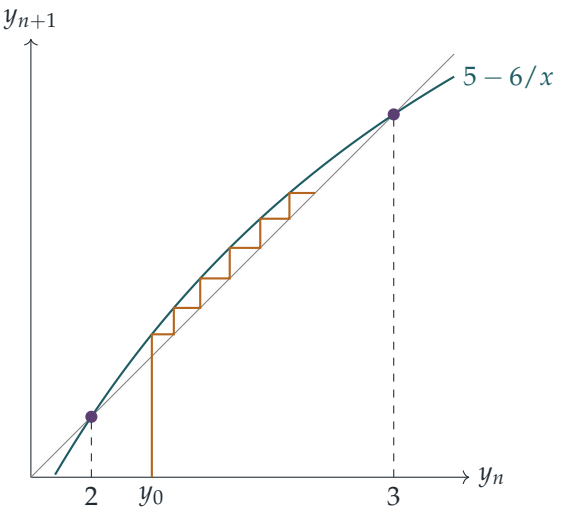
いよいよ帰納法である。主張：すべての $n \geq 0$ に対して $2 < y_n < 3$ である。$n = 0$ のときは仮定より成り立つ。$2 < y_n < 3$ と仮定する。このとき

- 差の計算により $y_{n+1} > y_n > 2$ である。
- $3 - y_n > 0$ かつ $y_n > 0$ より $3 - y_{n+1} = 2(3 - y_n)/y_n > 0$ であるから、$y_{n+1} < 3$ である。

したがって $2 < y_{n+1} < 3$ となり、帰納法が完成する。

すべての $n$ に対して $2 < y_n < 3$ であるから、差の計算は各段階で適用でき、すべての $n \geq 0$ に対して $y_{n+1} > y_n$ となる。この数列は狭義単調増加でありながら、すべての $n$ に対して $y_n < 3$ であり、これが示すべきことであった。

蜘蛛の巣図（cobweb diagram）を見ると、何が起きているかがわかる。曲線 $y = 5 - 6/x$ は直線 $y = x$ と $x = 2$ および $x = 3$ で交わり、その間では直線より上にあって、反復の値は 3 に達することなく 3 に向かって上っていく。




## 検算

- 不動点では漸化式は定数列を与える。実際 $(3^2+6)/5=3$、$5-6/3=3$、$5-6/2=2$ であり、因数 $(t-2)(t-3)$ と一致する。
- $y_0=2.5$ から始めると $y_1=2.6$、$y_2\approx 2.692$、$y_3\approx 2.771$ となり、増加しかつ 3 より小さい。200 ステップ後には $y_n$ は 3 との差が $10^{-15}$ 以内になる。$x_0=3.1$ から始めると $x_1=3.122$、$x_2\approx 3.149$ となり、増加している。
- コンピュータを用いて、数百個のランダムな初期値について両方の帰納法を厳密な分数で検証し、さらに $x_0$ が 3 よりわずかに小さいと $x_1<x_0$ となることを確認した。よって条件 $x_0>3$ は必要である。

## よくある間違い

- $x_n>3$ という仮定のもとで $x_{n+1}>x_n$ を示したところで終えてしまい、すべての項が 3 より大きいことを帰納法で証明しない。
- 小問 (ii) で $y_{n+1}<3$ を証明しても、帰納法を続けるには $y_{n+1}>2$ も必要であることを忘れる（これは $y_{n+1}>y_n$ から従う）。
- $y_n>0$ であることに触れずに、不等式の両辺に $y_n$ を掛ける。

## STEP のその先へ

小問 (ii) の数列は有界な増加数列であり、解析学の**単調収束定理**（monotone convergence theorem）によれば、このような数列は必ず収束（converge）する。極限 $L$ はいずれも $L = 5 - 6/L$ を満たすので、ここでは $y_n \to 3$ である。小問 (i) では、有限の極限があればそれは 3 より大きい不動点でなければならないが、そのようなものは存在しないので、数列は限りなく増加する。反復が不動点に引き寄せられるか、それとも不動点から遠ざけられるかは、その点における写像の傾きで決まり、これが離散力学系（discrete dynamical system）の理論の出発点である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門）は単調収束を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。