解答例

STEP I 2004、第 7 問

純粋数学 ・ 母関数

> **STEP I 2004、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q7

鍵となる考え方

線形漸化式（linear recurrence）とべき級数（power series）は、同じ対象を二通りに記述したものである。級数に $1-7x+10x^2$ を掛けると、各係数 a_n が a_{n-1} および a_{n-2} と同じ位置に並ぶので、漸化式によって積のほとんどすべての係数が 0 になる。残るのは多項式であり、したがって f は有理関数（rational function）である。あとは部分分数分解（partial fractions）と等比級数（geometric series）によって a_n が直接求まる。小問 (ii) も、与えられた値から p と q を求めてしまえば、同じ仕組みで解ける。

解答

小問 (i)

$|x| < \frac{1}{5}$ のとき級数は収束（converge）するので、x のべきを掛けたり、級数どうしを項別に足したりしてよい：

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n, \\ -7x\,\mathrm{f}(x) &= -7a_0 x - \sum_{n=2}^{\infty} 7a_{n-1} x^n, \\ 10x^2\mathrm{f}(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} 10a_{n-2} x^n. \end{aligned}$$

（2 行目と 3 行目では、すべての和が $n \geq 2$ の x^n についての和になるように添字を付け替えている。）これらを足すと、

$$\mathrm{f}(x) - 7x\,\mathrm{f}(x) + 10x^2\mathrm{f}(x) = a_0 + (a_1 - 7a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2})x^n.$$

漸化式により和の中の括弧はすべて 0 であり、また $a_0 = 2$、$a_1 - 7a_0 = 7 - 14 = -7$ である。よって

$$(1 - 7x + 10x^2)\,\mathrm{f}(x) = 2 - 7x.$$

ここで $1 - 7x + 10x^2 = (1 - 2x)(1 - 5x)$ であり、これは $|x| < \frac{1}{5}$ で 0 にならないので、両辺を割ってよい：

$$\mathrm{f}(x) = \frac{2 - 7x}{(1 - 2x)(1 - 5x)}.$$

分子は二つの因数の和 $(1 - 5x) + (1 - 2x) = 2 - 7x$ であるから、

$$\mathrm{f}(x) = \frac{(1 - 5x) + (1 - 2x)}{(1 - 2x)(1 - 5x)} = \frac{1}{1 - 2x} + \frac{1}{1 - 5x},$$

となり、示すべき式が得られた。

$|x| < \frac{1}{5}$ のとき $|2x| < 1$ かつ $|5x| < 1$ であるから、二つの分数はいずれも収束する等比級数の和である：

$$\mathrm{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 5^n) x^n.$$

考えてみよう なぜここで a_n を読み取ることができるのか？

区間 $|x| < \frac{1}{5}$ のすべての x で一致する二つのべき級数が得られている。べき級数は 0 の近くでの値によって決まる。実際、その係数は $a_n = \mathrm{f}^{(n)}(0)/n!$ として復元できる。したがって係数どうしは一致しなければならず、

$$a_n = 2^n + 5^n \quad \text{すべての} n \geq 0.$$

が成り立つ。（簡単な確認として、$a_0 = 1 + 1 = 2$、$a_1 = 2 + 5 = 7$ である。）

小問 (ii)

まず p と q を求める必要がある。漸化式に $n = 2$ と $n = 3$ を代入すると：

$$b_2 = pb_1 + qb_0 : \quad 40 = 10p + 5q, \quad \text{よって} 2p + q = 8;$$
$$b_3 = pb_2 + qb_1 : \quad 100 = 40p + 10q, \quad \text{よって} 4p + q = 10.$$

辺々引くと $2p = 2$ となるので、$p = 1$、$q = 6$ である。漸化式は $b_n = b_{n-1} + 6b_{n-2}$ となる。

小問 (i) とまったく同様に、$1 - x - 6x^2$ を掛けると x^2 以降のすべての係数が消える：

$$(1 - x - 6x^2)\,\mathrm{g}(x) = b_0 + (b_1 - b_0)x = 5 + 5x.$$

$1-x-6x^2=(1-3x)(1+2x)$ であり、これは $|x|<\frac{1}{3}$ で 0 にならないので、

$$\mathrm{g}(x)=\frac{5+5x}{(1-3x)(1+2x)}=\frac{A}{1-3x}+\frac{B}{1+2x},$$

ただし $5+5x=A(1+2x)+B(1-3x)$ である。$x=\frac{1}{3}$ を代入すると $\frac{20}{3}=\frac{5}{3}A$ より $A=4$、$x=-\frac{1}{2}$ を代入すると $\frac{5}{2}=\frac{5}{2}B$ より $B=1$ である。したがって

$$\mathrm{g}(x)=\frac{4}{1-3x}+\frac{1}{1+2x}.$$

$|x|<\frac{1}{3}$ のとき $|3x|<1$ かつ $|2x|<1$ であるから、両方を等比級数として展開すると、

$$\mathrm{g}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(4\cdot 3^n+(-2)^n)x^n,$$

となり、先ほどと同様に係数を比較して、

$$b_n=4\cdot 3^n+(-2)^n.$$

を得る。

検算

得られた公式は与えられた値を再現する：$4+1=5$、$12-2=10$、$36+4=40$、$108-8=100$。漸化式から $n=39$ まで a_n と b_n を計算すると、2^n+5^n および $4\cdot 3^n+(-2)^n$ と完全に一致する。数値的には、$x=0.1$ において級数の部分和は f について 3.25、g について 6.547619… となり、$\frac{1}{0.8}+\frac{1}{0.5}=3.25$ および $\frac{4}{0.7}+\frac{1}{1.2}=\frac{275}{42}$ と一致する。

よくある間違い

- 漸化式が $n=2$ からしか成り立たないことを忘れること。積の x^0 の項と x^1 の項は別に計算しなければならず、それらが分子を与える。
- 小問 (ii) で、p と q が未知のまま漸化式を使ったり、分子を $b_0+(b_1-pb_0)x$ ではなく b_0+b_1x と書いたりすること。
- $1-x-6x^2$ を因数分解するときに符号を誤り、3^n と $(-2)^n$ ではなく 3^n と 2^n を導いてしまうこと。

STEP のその先へ

級数 f は数列 (a_n) の**母関数**（generating function）と呼ばれ、この方法は定数係数の任意の線形漸化式に対して使える。分母は常に漸化式から組み立てられ、その因

数が「特性根」（characteristic roots、ここでは 2 と 5）を与える。母関数は組合せ論（combinatorics）や確率論における中心的な道具であり、確率論では確率母関数（probability generating function）によって確率変数（random variable）の和が積に変換される。「等しいべき級数は等しい係数をもつ」という段階は、解析学（analysis）の最初の講義できちんと正当化される。べき級数とその一意性（uniqueness）については、Abbott, *Understanding Analysis* を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。