解答例

STEP I 2004、第 6 問

純粋数学 ・ ベクトルと三角形

> **STEP I 2004、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q6

鍵となる考え方

x 座標と y 座標を別々に扱うのではなく、位置ベクトル（position vector）を用いる。$\mathbf{a} = (p_1, q_1)$, $\mathbf{b} = (p_2, q_2)$, $\mathbf{c} = (p_3, q_3)$ とおけば、H の位置ベクトルは $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ である。すると問題に現れるどの直線も短いベクトル表示をもち、「直角に交わる」は「内積（scalar product）が 0 である」に置き換わる。現れる内積は平方の差（difference of two squares）$(\mathbf{c} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b})$ であり、後半はこれに尽きる。

解答

A, B, C は一直線上にない（collinear でない）と仮定し、真の三角形をなすものとする（そうでなければ前半の直線どうしが一致することがあり、交点がただ一つに定まらない）。

中線は一点で交わる

BC, CA, AB の中点（midpoint）をそれぞれ L, M, N とし、その位置ベクトルを

$$\mathbf{l} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}), \qquad \mathbf{m} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c}), \qquad \mathbf{n} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

とする。直線 AL 上の一般の点は

$$\mathbf{a} + s(\mathbf{l} - \mathbf{a}) = (1 - s)\,\mathbf{a} + \tfrac{s}{2}\,\mathbf{b} + \tfrac{s}{2}\,\mathbf{c},$$

であり、直線 BM 上の一般の点は

$$\mathbf{b} + t(\mathbf{m} - \mathbf{b}) = \tfrac{t}{2}\,\mathbf{a} + (1 - t)\,\mathbf{b} + \tfrac{t}{2}\,\mathbf{c}.$$

である。**a**, **b**, **c** の係数がそれぞれ一致すれば、二つの式は等しい。すなわち $1-s=\frac{t}{2}$, $\frac{s}{2}=1-t$, $\frac{s}{2}=\frac{t}{2}$ である。最後の式から $s=t$ が得られ、これを $1-s=\frac{s}{2}$ に代入すると $s=t=\frac{2}{3}$ となり、これは三つの式をすべて満たす。よって二つの直線はともに、位置ベクトルが

$$\mathbf{g}=\tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}), \qquad \text{すなわち} \qquad G=\left(\tfrac{p_1+p_2+p_3}{3},\ \tfrac{q_1+q_2+q_3}{3}\right).$$

である点 G を通る。

考えてみよう 係数比較によってある共通点が見つかった。それが唯一の交点であるとなぜわかるのか。

異なる二直線が交わる点は高々一つなので、AL と BM が異なる直線であることを示せばよい。もし同じ直線であれば、それは A, B, L を含み、したがって直線 BL 全体、すなわち直線 BC を含む。すると A は BC 上にあることになり、仮定に反する。よって G はただ一つの交点である。

三本目の中線（median）CN については、点 $\mathbf{c}+u(\mathbf{n}-\mathbf{c})$ で $u=\frac{2}{3}$ とすると

$$\mathbf{c}+\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{2}\mathbf{a}+\tfrac{1}{2}\mathbf{b}-\mathbf{c}\right)=\tfrac{1}{3}\mathbf{a}+\tfrac{1}{3}\mathbf{b}+\tfrac{1}{3}\mathbf{c}=\mathbf{g}.$$

となる。よって G は C と AB の中点を結ぶ直線上にあり、これが示すべきことであった。（毎回 $\frac{2}{3}$ という値が現れることは、重心（centroid）G が各中線を頂点から 3 分の 2 の位置にあることを意味している。）

H における垂直性

点 H の位置ベクトルは $\mathbf{h}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ なので

$$\overrightarrow{AH}=\mathbf{h}-\mathbf{a}=\mathbf{b}+\mathbf{c}, \qquad \overrightarrow{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}.$$

である。直線 AH が BC と直角に交わるならば、これらの方向ベクトルの内積は 0 である：

$$0=(\mathbf{c}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{b})=\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}-\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=(p_3^2+q_3^2)-(p_2^2+q_2^2),$$

ここで交差項 $\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}$ と $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ は、内積が交換法則を満たす（commutative）ため打ち消し合う。したがって

$$p_2^2+q_2^2=p_3^2+q_3^2,$$

であり、これが求める結果である。言葉で言えば、B と C は原点 O から等距離にある。

まったく同様に、$\overrightarrow{BH}=\mathbf{a}+\mathbf{c}$, $\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}-\mathbf{a}$ なので、BH が AC と直角に交わるならば $(\mathbf{c}+\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$ であり、

$$p_1^2+q_1^2=p_3^2+q_3^2.$$

が得られる。

三本目の垂線

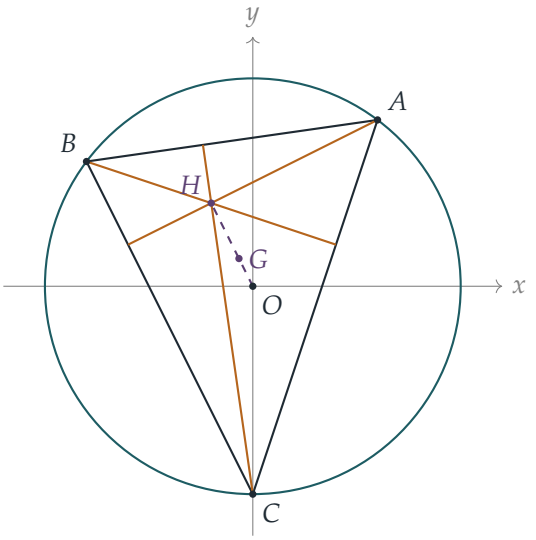
二つの垂直条件がともに成り立つとする。上の二つの結果を合わせると

$$p_1^2+q_1^2=p_3^2+q_3^2=p_2^2+q_2^2, \qquad \text{よって} \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}.$$

である。ここで $\overrightarrow{CH}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$ であり、

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=(\mathbf{b}+\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=0.$$

となる。よって CH は AB に垂直である（ただし CH が真の直線となるよう $H\neq C$ とする。$H=C$ ならばこの主張は中身をもたない）。以上で導出が完了する。



図は最後の小問の状況を表している。A, B, C は原点 O を中心とする円周上にあり、三本の垂線（altitude、琥珀色）はすべて H を通り、O, G, H は $\mathbf{h}=3\mathbf{g}$ を満たして一直線上にある。

検算

- $A=(3,4), B=(-4,3), C=(0,-5)$ とすると、いずれも O からの距離は 5 である。このとき $H=(-1,2)$ であり、$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=(-4)(4)+(-2)(-8)=0$ となる。残り二つの内積も 0 である。重心は $G=(-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ であり、H の 3 分の 1 になっている。
- 数値的にも、整数座標の頂点をもつ約 2000 個の無作為な三角形について、二本の中線の交点を分数で厳密に計算すると常に $\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$ となり、三本目の中線上にあった。また、O を中心とする円に内接する 1000 個の無作為な三角形について、H に関する三つの内積はすべて 0 になった。

よくある間違い

- 二本の中線が G を通ることを示しながら、それらが同じ直線になりえない理由を述べないこと。A, B, C が一直線上にないことに触れる一文で片がつく。
- $\overrightarrow{OH} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ を AH の方向として用いること。方向は $\mathbf{h} - \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ である。
- この結果がすべての三角形について成り立つと考えること。仮定によって O は A, B, C から等距離になる。一般の原点に対しては、H は垂心（orthocentre）ではない。

STEP のその先へ

最後の小問は、三角形の三本の垂線が一点で交わる（concurrent）ことを証明している。原点を外心（circumcentre）O（頂点から等距離にある点）にとれば、点 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ は三本すべての上にある。さらに $\mathbf{h} = 3\mathbf{g}$ であるから、外心・重心・垂心が一直線上、すなわち**オイラー線**（Euler line）上にあり、$OG : GH = 1 : 2$ であることも示される。座標によらない恒等式が仕事をしてくれるこのベクトル流の幾何学は、大学 1 年次の線形代数（linear algebra）で幾何を扱うときのやり方そのものである。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）がこれを展開しており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）には STEP 形式の演習がさらに載っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。