解答例

STEP I 2004、第 4 問

純粋数学 ・ 置換積分

> **STEP I 2004、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q4

鍵となる考え方

$\sqrt{x^2-1}$ を見たら、恒等式（identity）$\sec^2 t - 1 = \tan^2 t$ を思い浮かべるとよい。$x = \sec t$ とおくと平方根は $\tan t$ になり、しかも $\mathrm{d}x = \sec t \tan t \, \mathrm{d}t$ であるから、この $\tan t$ も約分されて消える。小問 (ii) と (iii) は見た目が異なるが、根号の中を平方完成（completing the square）すると、どちらも $u = x + 2$ として同じ形 $\sqrt{u^2 - a^2}$ になり、根号の外にある因数 $x + 2$ がちょうど置換に必要なものになっている。

解答

導関数

$\sec t = (\cos t)^{-1}$ と書き、合成関数の微分法（chain rule）を用いると、

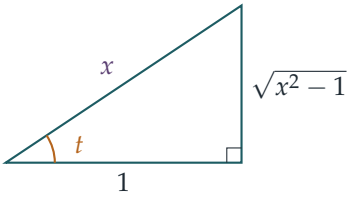
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sec t = -(\cos t)^{-2} \cdot (-\sin t) = \frac{\sin t}{\cos^2 t} = \sec t \tan t.$$

小問 (i)

$x = \sec t$ とおくと、$\mathrm{d}x = \sec t \tan t \, \mathrm{d}t$ である。$x = \sqrt{2}$ のとき $\cos t = 1/\sqrt{2}$ より $t = \frac{\pi}{4}$、$x = 2$ のとき $\cos t = \frac{1}{2}$ より $t = \frac{\pi}{3}$ である。t が $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ にあるとき $\tan t > 0$ であるから、

$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\sec^2 t - 1} = \sqrt{\tan^2 t} = \tan t$$

となる（絶対値記号は必要ない）。下の三角形も同じことを表している。斜辺が x、隣辺が 1 であるから、対辺は $\sqrt{x^2-1}$ である。



積分は次のようになる。

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec t\tan t}{\sec^3 t\,\tan t}\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \tfrac{1}{2}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\sin 2t\right]_{\pi/4}^{\pi/3} \\ &= \left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right) - \left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}-2}{8} + \frac{\pi}{24},\end{aligned}$$

ここで $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$、$\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$、$\sin\frac{\pi}{2} = 1$ を用いた。これが求める結果である。

小問 (ii)

考えてみよう 小問 (ii) には $\sqrt{x^2-1}$ が含まれていない。小問 (i) はどのように役立つだろうか？

根号の中を展開して平方完成する。

$$(x+1)(x+3) = x^2+4x+3 = (x+2)^2 - 1.$$

よって $u = x+2$（$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$）とおくと、積分は

$$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\,\mathrm{d}u.$$

となる。被積分関数（integrand）は $u^2 > 1$ のときに限り定義される。まず $u > 1$（すなわち $x > -1$）の場合を考え、$0 < t < \frac{\pi}{2}$ として $u = \sec t$ とおくと、$\tan t > 0$ であり $\sqrt{u^2-1} = \tan t$ となる。このとき

$$\int \frac{\sec t\tan t}{\sec t\,\tan t}\,\mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t = t + C,$$

であり、$\sec t = u$ であるから $t = \operatorname{arcsec} u$（同値な表し方として $\arccos(1/u)$）である。したがって、$x > -1$ において

$$\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{(x+1)(x+3)}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arcsec}(x+2) + C.$$

念のため付け加えると、被積分関数は $x < -3$ でも定義され、そこでは $u < -1$ である。この範囲では $v > 1$ として $u = -v$ とおく。すると $\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\,\mathrm{d}u$ は $\dfrac{1}{(-v)\sqrt{v^2-1}}(-\mathrm{d}v) = \dfrac{1}{v\sqrt{v^2-1}}\,\mathrm{d}v$ となり、その積分は $\operatorname{arcsec} v$ である。両方の場合をまとめると

$$\operatorname{arcsec}|x+2| + C = \arccos\frac{1}{|x+2|} + C,$$

となる。ただし、2 つの区間で定数は異なってもよい。

小問 (iii)

再び平方完成する。

$$x^2 + 4x - 5 = (x+2)^2 - 9,$$

よって $u = x+2$ とおくと、$\displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-9}}\,\mathrm{d}u$ を求めればよい。今度の自然な置換は $u = 3\sec t$ であり、これは $u^2 - 9 = 9\tan^2 t$ となるように選んだものである。$u > 3$（すなわち $x > 1$）のときは $0 < t < \frac{\pi}{2}$ ととれば、$\sqrt{u^2-9} = 3\tan t$、$\mathrm{d}u = 3\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$ である。このとき

$$\int \frac{3\sec t\tan t}{3\sec t\cdot 3\tan t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{3}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{3} + C,$$

であり、$\sec t = u/3$ である。したがって、$x > 1$ において

$$\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x-5}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\operatorname{arcsec}\frac{x+2}{3} + C.$$

小問 (ii) とまったく同様に、$x < -5$（$u < -3$）の場合は $u = -v$ とおけば扱え、両方の区間は $\frac{1}{3}\operatorname{arcsec}(\frac{1}{3}|x+2|) + C$ でまとめて表される。

検算

- 小問 (i) の積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると 0.0974060… となり、$\frac{1}{8}(\sqrt{3}-2) + \frac{\pi}{24}$ と一致する。
- 答えを微分してみる。$u > 1$ において $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\operatorname{arcsec} u = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}$ である（$u = \sec t$ とおき、最初に求めた導関数を用いればよい）。例えば、小問 (ii) の被積分関数の $\int_0^3$ は数値的に 0.322241 であり、$\operatorname{arcsec} 5 - \operatorname{arcsec} 2 = \arccos\frac{1}{5} - \frac{\pi}{3}$ と一致する。
- 小問 (iii) は小問 (ii) を拡大・縮小したものになっているはずである。$u = 3w$ とおくと $\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-9}} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}w}{w\sqrt{w^2-1}}$ となり、これが因数 $\frac{1}{3}$ の理由である。

よくある間違い

- 小問 (i) で積分区間を変換し忘れる、あるいは上端と下端を逆にしてしまう。$\sec t = \sqrt{2}$ からは $t = \frac{\pi}{4}$ が得られ、$\frac{\pi}{3}$ ではない。
- 用いる範囲で $\tan t$ の符号を確かめずに $\sqrt{\tan^2 t} = \tan t$ と書いてしまう。
- 小問 (iii) で $u = 3\sec t$ ではなく $u = \sec t$ と置換してしまい、簡単にする恒等式のない $\sqrt{\sec^2 t - 9}$ が残る。

STEP のその先へ

逆正割関数（inverse secant）は、ある一族の一員である。置換 $x = a\sin t$、$a\tan t$、$a\sec t$（あるいはその双曲線関数版である $a\sinh t$、$a\cosh t$）はそれぞれ $\sqrt{a^2 - x^2}$、$\sqrt{a^2 + x^2}$、$\sqrt{x^2 - a^2}$ を扱いやすくし、平方完成によって任意の $\sqrt{\text{二次式}}$ はこれらのいずれかに帰着される。符号や、原始関数（antiderivative）がどの区間で定義されるかに払うべき注意は、解析学（analysis）の講義で積分がどのように厳密に扱われるかを初めて垣間見るものである。Bartle と Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は置換積分の定理をきちんと扱っており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）には、この趣旨の STEP の積分問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。