解答例

STEP I 2004、第 3 問

純粋数学 ・ 二変数多項式の因数分解

> **STEP I 2004、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q3

鍵となる考え方

2 変数の多項式（polynomial）は、そのうち**一方**の変数についての多項式で、係数にもう一方の変数を含むものとみなすことができる。x についての多項式とみなしても、因数定理（factor theorem）はそのまま成り立ち、多項式の割り算もそのまま使え、x についての 2 次式は判別式（discriminant）が完全平方（perfect square）であればやはり因数分解できる。小問 (ii) では x についての最高次の係数（leading coefficient）そのものが y の 1 次式になっており、これは y だけを含む因数が一つあることを示唆している。

解答

小問 (i)

式 $(*)$ を x の累乗ごとに整理する：

$$P(x) = x^3 + (2y-5)x^2 + (y^2 - 8y + 6)x + (6y - 3y^2).$$

$x = 3$ を代入すると、

$$\begin{aligned} P(3) &= 27 + 9(2y-5) + 3(y^2 - 8y + 6) + 6y - 3y^2 \\ &= (27 - 45 + 18) + (18y - 24y + 6y) + (3y^2 - 3y^2) = 0 \end{aligned}$$

がすべての y について成り立つ。よって因数定理により $x - 3$ は因数であり、示すべきことが示された。

もう一方の因数を求めるために、$P(x) = (x-3)(x^2 + px + q)$ とおく。ここで p と q は y に依存してよい。右辺を展開すると $x^3 + (p-3)x^2 + (q-3p)x - 3q$ となり、係数

を比較すると次のようになる：

$$\begin{aligned} x^2: &\quad p-3=2y-5, && \text{よって} p=2y-2,\\ x^0: &\quad -3q=6y-3y^2, && \text{よって} q=y^2-2y, \end{aligned}$$

また x の係数も確かに合っている：$q-3p=y^2-8y+6$ となり、そうなるべきとおりである。したがって2次の因数は

$$x^2+(2y-2)x+y^2-2y=(x^2+2xy+y^2)-2(x+y)=(x+y)(x+y-2).$$

である。

考えてみよう この2次式が因数分解できることに、どうやって気づいたのか？

項 $x^2+2xy+y^2$ は完全平方 $(x+y)^2$ であり、残りの項 $-2x-2y$ は $x+y$ の倍数である。（このまとめ方がすぐに思いつかなくても、x についての判別式は $(2y-2)^2-4(y^2-2y)=4$ で完全平方なので、解は $x=-y+1\pm 1$、すなわち $x=-y$ と $x=2-y$ である。）したがって

$$(*)=(x-3)(x+y)(x+y-2),$$

となり、$a=1, b=0, c=1, d=-2$ である（あるいは二つの因数を入れ替えて $a=1, b=-2, c=1, d=0$ としてもよい）。

小問 (ii)

この式を Q とおき、再び x の累乗ごとに整理する：

$$Q=(y+2)x^2+(12-4y-5y^2)x+(6y^3-y^2-21y+10).$$

x^2 の係数は $y+2$ である。Q が三つの1次因数の積であれば、x^2 の項はそのうち二つの因数の x の部分から生じるので、$y+2$ が式全体を割り切るかどうかを調べるのは自然である。$y=-2$ とおくと

$$12+8-20=0, \qquad -48-4+42+10=0,$$

となり、残りの二つの係数はともに $y=-2$ で0になる。よって（y についての）因数定理により、どちらも $y+2$ で割り切れる：

$$\begin{aligned} 12-4y-5y^2&=-(5y^2+4y-12)=-(y+2)(5y-6),\\ 6y^3-y^2-21y+10&=(y+2)(6y^2-13y+5). \end{aligned}$$

さらに $6y^2-13y+5=(2y-1)(3y-5)$ である。ゆえに

$$Q=(y+2)[x^2-(5y-6)x+(2y-1)(3y-5)].$$

考えてみよう 括弧の中は因数分解できるか。また、それはどうすればわかるか？

x についての判別式は

$$\begin{aligned}(5y-6)^2-4(2y-1)(3y-5) &= 25y^2-60y+36-(24y^2-52y+20)\\ &= y^2-8y+16=(y-4)^2,\end{aligned}$$

で完全平方なので、因数分解できる。もっと手早く見るなら、$(2y-1)+(3y-5)=5y-6$ なので、積が $(2y-1)(3y-5)$、和が $5y-6$ となる二つの数は $2y-1$ と $3y-5$ であり、解は $x=2y-1$ と $x=3y-5$ である。したがって

$$Q=(y+2)(x-2y+1)(x-3y+5).$$

検算

- 小問 (i) で $x=y=1$ とおく：$(*)$ は $1-5+2+1-8-3+6+6=0$ となり、$(1-3)(2)(0)=0$ である。$x=2, y=1$ のとき：$(*)$ は $8-20+8+2-16-3+12+6=-3$ となり、$(-1)(3)(1)=-3$ である。
- 小問 (ii) で $x=y=0$ とおく：$Q=10$ であり、$(2)(1)(5)=10$ である。$x=1, y=1$ のとき：$Q=6-1-21+2+12-4+1-5+10=0$ であり、確かに $x-2y+1=0$ である。
- 二つの因数分解を、ランダムに選んだ 2000 個の点 (x,y) で厳密な有理数演算により確かめたところ、すべて一致した。

よくある間違い

- 式を x についての多項式として扱いながら、「定数」項とは x を含まない部分すべてであること、つまり小問 (i) では $6y-3y^2$ であることを忘れる。
- 小問 (ii) で、k を数として解 $x=k$ を探そうとする：$x-k$ の形の因数は存在しない。最初に見つけるべきなのは、x を含まない因数 $y+2$ である。
- $-(5y^2+4y-12)$ を $y+2$ で割るときの符号の誤り。展開して確かめること。

STEP のその先へ

多変数の多項式は環（ring）をなし、$\mathbb{Z}[x,y]$ は $(\mathbb{Z}[y])[x]$、すなわち係数が y の多項式であるような x の多項式全体とみなすことができる。これはまさに本問で行ったこと

であり、因数定理や割り算がそのまま使えるのはこのためである。これらの環では一意分解（unique factorisation）が成り立つ（ガウス（Gauss）の補題）ので、ここで求めた因数分解は、順序と符号の違いを除いてただ一通りである。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）はこうした考え方を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。