解答例

STEP I 2004、第 2 問

純粋数学 • 床関数の積分

> **STEP I 2004、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q2

鍵となる考え方

関数 $[x]$ は各区間 $r \le x < r+1$ 上で一定であるから、これを用いて作られる関数はすべて階段関数（step function）である。階段関数の積分（integral）は長方形の面積を足し合わせることにほかならない。すなわち、$[0,a]$ を整数の点で分割すれば、各単位区間上で被積分関数は定数になる。a が整数でない場合に新たに現れるのは、最後の幅の狭い長方形だけである。

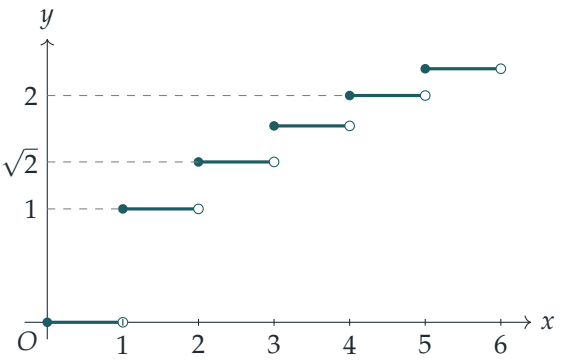
解答

小問 (i)

$x \ge 0$ に対して $r = [x]$ とおく。すると r は非負整数であり、$r \le x < r+1$ であるから、この区間上で

$$y = \sqrt{[x]} = \sqrt{r}.$$

したがってグラフは階段状になる。すなわち、$[0,1)$ 上で $y = 0$、$[1,2)$ 上で $y = 1$、$[2,3)$ 上で $y = \sqrt{2}$、以下同様である。$[x]$ はちょうど各整数のところで跳ね上がるので、各段は左端点を含み（黒丸）、右端点は含まない（白丸）。$\sqrt{r+1} - \sqrt{r} = 1/(\sqrt{r+1} + \sqrt{r})$ は減少するから、段の上がり幅はしだいに小さくなる。$x < 0$ では $[x] \le -1$ となるので $\sqrt{[x]}$ は定義されず、グラフは $x \ge 0$ の範囲にのみ存在する。



次に a を正の整数とする。積分区間を整数 $1, 2, \ldots, a-1$ で分割すると

$$\int_0^a \sqrt{[x]}\,\mathrm{d}x = \sum_{r=0}^{a-1} \int_r^{r+1} \sqrt{[x]}\,\mathrm{d}x.$$

$r \le x < r+1$ 上で被積分関数は定数 $\sqrt{r}$ に等しい。（ただ一点 $x = r+1$ では異なる値をとるが、関数の値を一点で変えても積分の値は変わらない。）よって各部分は幅 1、高さ $\sqrt{r}$ の長方形の面積であり、

$$\int_r^{r+1} \sqrt{[x]}\,\mathrm{d}x = \sqrt{r}, \qquad \text{したがって} \qquad \int_0^a \sqrt{[x]}\,\mathrm{d}x = \sum_{r=0}^{a-1} \sqrt{r}$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

$2^{[x]}$ についても全く同じ議論が成り立つ。この関数は $r \le x < r+1$ 上で 2^r に等しい。正の整数 a に対して

$$\int_0^a 2^{[x]}\,\mathrm{d}x = \sum_{r=0}^{a-1} \int_r^{r+1} 2^r\,\mathrm{d}x = \sum_{r=0}^{a-1} 2^r = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{a-1}.$$

これは初項 1、公比 2、項数 a の等比級数（geometric series）であるから、その和は

$$\frac{2^a - 1}{2 - 1} = 2^a - 1$$

であり、これが求める結果である。

小問 (iii)

次に $a > 0$ を整数でない数とし、$n = [a]$ とおく。すると n は $n < a < n+1$ かつ $n \ge 0$ を満たす整数である。

考えてみよう 積分が単位長方形の和でなくなるのはどこからか？

$x = n$ までは小問 (ii) と全く同じである。残りの部分は $n \le x \le a$ であり、これは一つの段の内部にある幅 $a - n$ の帯で、そこでは $[x] = n$ である。（$n = 0$ のときは最初の部分が空で、寄与は $2^0 - 1 = 0$ となるから、同じ式が成り立つ。）したがって

$$\begin{aligned}\int_0^a 2^{[x]}\,\mathrm{d}x &= \int_0^n 2^{[x]}\,\mathrm{d}x + \int_n^a 2^n\,\mathrm{d}x \\ &= (2^n - 1) + (a - n)\,2^n \\ &= 2^{[a]}(1 + a - [a]) - 1.\end{aligned}$$

検算

- $0 < a < 1$ ならば $[a] = 0$ であり、公式は $1 \cdot (1 + a) - 1 = a$ を与える。被積分関数は $[0, a]$ 上で 1 であるから、これは正しい。
- a が下から整数 m に近づくとき、$[a] = m - 1$ であり、公式の値は $2^{m-1} \cdot 2 - 1 = 2^m - 1$ に近づき、小問 (ii) と一致する。よって積分は a の連続関数（continuous function）である。有界な関数の積分は、上端の関数として必ず連続になるので、これは当然である。
- 数値的には、$a = 2.5$ のとき公式は $4 \times 1.5 - 1 = 5$ を与え、中点則による積分の数値計算でも 5.000 となる。小問 (i) で $a = 5$ とすると、両辺はともに $0 + 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 \approx 6.1463$ である。

よくある間違い

- $r = 0$ から $a - 1$ までではなく、$r = 1$ から a までの和をとってしまう。$[r, r + 1)$ 上での高さは $\sqrt{r}$、すなわち**左端**での値である。
- 小問 (iii) で端の部分の帯を忘れる、あるいはその幅を $a - [a]$ ではなく 1 としてしまう。
- 段と段を縦線でつないで描いたり、両端を黒丸で描いたりする。床関数（floor function）は整数の点で連続ではない。

STEP のその先へ

階段関数を長方形の和として積分することは、まさに大学でリーマン（Riemann）積分を構成する方法そのものである。まず階段関数に対して積分を定義し、次に一般の

関数を上下から階段関数で挟み込むのである。小問 (i) はまた、和と積分を比較する手法の第一歩でもあり、これにより $\sum_{r=1}^{n} \sqrt{r} \approx \frac{2}{3} n^{3/2}$ のような評価が得られる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、この方法でリーマン積分を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。