解答例

STEP I 2004、第 14 問

確率・統計 ・ 並べ方の数え上げ

> **STEP I 2004、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q14

鍵となる考え方

箱の中身を硬貨 1 枚ずつ取り出して、すべてを 1 列に並べるところを想像する。海賊たちはこの列を 2 枚の鉛の硬貨のところで切り分けているにすぎない。1 人目の海賊は最初の鉛の硬貨より前にある金貨を、2 人目は 2 枚の鉛の硬貨の間にある金貨を、3 人目は 2 枚目の鉛の硬貨より後にある金貨を受け取る。硬貨の並び方はどれも等しく起こりやすいので、すべては 2 枚の鉛の硬貨がどの位置に来うるかを数えることに帰着する。

解答

実際には 3 人目の海賊は残りをまとめて取るだけであるが、$n+2$ 枚の硬貨がすべて無作為な順序で取り出されると考える。こう考えても、誰がどの硬貨を受け取るかは変わらない。取り出しは無作為であるから、鉛の硬貨 2 枚の位置を（$n+2$ 個の位置から）選ぶ $\binom{n+2}{2}$ 通りの選び方はどれも等確率である。

1 人目、2 人目、3 人目の海賊が受け取る金貨の枚数をそれぞれ A、B、C とする。このとき $A+B+C=n$ であり、硬貨の列は次のようになる。



ここで、金貨は琥珀色、鉛の硬貨は紫色で表している。鉛の硬貨の位置によって (A,B,C) が定まり、$A+B+C=n$ を満たす非負整数の組はどれも、ちょうど 1 通りの位置の選び方から得られる。したがって、$\binom{n+2}{2}=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 個の組 (A,B,C)

はすべて等確率である。

小問 (i)

1 人目の海賊が金貨を 1 枚も得られないのは、$A = 0$ のとき、すなわち最初に取り出される硬貨が鉛であるときに限る。$n+2$ 枚の硬貨はどれも等しい確率で最初に取り出されるので、その確率（probability）は $\frac{2}{n+2}$ である。よって

$$\mathrm{P}(A \geq 1) = 1 - \frac{2}{n+2} = \frac{n}{n+2}.$$

（数え上げても同じ答えが得られる。$A = 0$ のとき $B + C = n$ となり、その解は $n+1$ 個あるので、$(n+1)/\frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{2}{n+2}$ である。）

小問 (ii)

考えてみよう 2 人目の海賊は無作為な時点から取り出し始める。本当に 1 人目より不利ではないのだろうか。

そのとおり、不利ではない。$B = 0$ となる組を数える。このとき $A + C = n$ であり、その解は小問 (i) とまったく同じく $n+1$ 個ある。よって

$$\mathrm{P}(B \geq 1) = 1 - \frac{n+1}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2}.$$

実際、組 (A, B, C) はすべて等確率であるから、3 人の取り分は**交換可能**（exchangeable）である。すなわち、3 人目も含めてどの海賊も、金貨を少なくとも 1 枚得る確率は同じ $\frac{n}{n+2}$ である。

小問 (iii)

A、B、C がすべて 1 以上である必要がある。$A = A' + 1$、$B = B' + 1$、$C = C' + 1$ とおく。すると、求める組は $A' + B' + C' = n - 3$ の非負整数解に対応する。星と棒（stars and bars）の方法により、そのような解は $\binom{n-1}{2}$ 個ある。これは直接にもわかる。隣り合う金貨の間にある $n-1$ 個の隙間から、鉛の硬貨を置く 2 か所を選べばよいからである。よって、$n \geq 1$ のとき

$$\mathrm{P}(A \geq 1,\ B \geq 1,\ C \geq 1) = \frac{\binom{n-1}{2}}{\binom{n+2}{2}} = \frac{(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)}.$$

これは $n = 1$ と $n = 2$ のとき 0 となり、当然そうでなければならない。金貨が 3 枚未満なら、3 人の海賊が全員金貨を得ることはできないからである。（$n = 0$ のときは確率は自明に 0 である。$\binom{n-1}{2}$ は存在しない隙間を数えることになるので、この場合には公式は適用できない。）

検算

- $n = 1$ のとき、硬貨の並びは GLL、LGL、LLG であり、すべて等確率である。1 人目の海賊が金貨を得るのは GLL のときだけで、その確率は $\frac{1}{3} = \frac{1}{1+2}$ である。2 人目が金貨を得るのは LGL のときだけで、これも $\frac{1}{3}$ である。
- $n = 3$ のとき、条件を満たす並びは $\binom{5}{2} = 10$ 通りのうち GLGLG の 1 通りだけであり、公式は $\frac{2 \cdot 1}{4 \cdot 5} = \frac{1}{10}$ を与える。
- $n = 1, \ldots, 14$ について厳密に数え上げた結果は、3 つの公式すべてと一致する。$n = 5$ の箱 2×10^5 個のシミュレーションでは 0.715、0.714、0.286 が得られ、理論値 $\frac{5}{7} \approx 0.714$、$\frac{5}{7}$、$\frac{12}{42} = \frac{2}{7} \approx 0.286$ と一致した。

よくある間違い

- 2 人目の海賊の取り出しを、満杯の箱から新たに始めるものとして扱うこと。2 人目に残る金貨の枚数は、1 人目の結果によって変わる。
- 小問 (iii) で $\mathrm{P}(A \geq 1)$、$\mathrm{P}(B \geq 1)$、$\mathrm{P}(C \geq 1)$ を掛け合わせること。取り分の和は n でなければならないので、これらは独立（independent）ではない。

STEP のその先へ

鉛の硬貨の位置と $A + B + C = n$ の解との対応は、「星と棒」の全単射（bijection）である。これは、無作為に置いた目印の間の隙間が交換可能であることを示している。連続版、すなわち棒の上に一様に点を落とす場合を考えると、一様間隔（uniform spacings）の理論やディリクレ分布（Dirichlet distribution）につながり、この種の順序統計量（order statistics）は大学 1 年の確率論のいたるところに現れる。Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）は、この数え上げとそれに伴う対称性の議論を非常によく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。