解答例

STEP I 2004、第 13 問

確率・統計 ・ 一様分布の最大値

STEP I 2004、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/04-s1-q13

鍵となる考え方

独立（independent）ないくつかの数の最大値が x 以下になるのは、それらがすべて x 以下であるとき、かつそのときに限る。これにより扱いにくい「最大値」が同じ確率の積に変わり、X の分布関数（distribution function）が 1 行で求まる。残りはすべてここから導かれる。微分すれば確率密度関数（density）と期待値（expectation）が得られ、分布関数を 0.05 と等しいとおけば検定（test）の臨界値（critical value）が求まる。

解答

小問 (i)

3 つの数を U_1, U_2, U_3 とする。これらは独立で、それぞれ $[0,1]$ 上の一様分布（uniform distribution）に従うので、$0 \le x \le 1$ に対して $\mathrm{P}(U_i \le x) = x$ である。$X = \max(U_1, U_2, U_3)$ であるから、

$$X \le x \iff U_1 \le x,\ U_2 \le x \text{ かつ} U_3 \le x.$$

独立性より、

$$F(x) = \mathrm{P}(X \le x) = x^3 \qquad (0 \le x \le 1).$$

特に $\mathrm{P}(X \le 0.8) = 0.8^3 = 0.512$ となり、題意が示された。

微分すると、X の確率密度関数は $[0,1]$ 上で $f(x) = F'(x) = 3x^2$ となるので、

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^1 x \cdot 3x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{3}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{3}{4}.$$

これは妥当な結果である。3 つの数のうち最大のものは、1 つの数の平均 $\frac{1}{2}$ よりかなり大きいはずだからである。

小問 (ii)

今度は独立な N 個の数があり、それぞれ $[0, a]$ 上の一様分布に従うので、$0 \le x \le a$ に対して $\mathrm{P}(U_i \le x) = x/a$ である。同じ議論により

$$\mathrm{P}(X \le x) = \left(\frac{x}{a}\right)^N \qquad (0 \le x \le a),$$

が得られ、$x \ge a$ に対しては $\mathrm{P}(X \le x) = 1$ である。X は連続型確率変数なので、$\mathrm{P}(X < x)$ も同じ値になる。

臨界値。 この検定は $x < c$ のとき H_0 を棄却する。有意水準（significance level）5% とは、H_0 が正しいとき（$a = 1$）に棄却する確率が 0.05 であることを意味する。

$$\mathrm{P}(X < c \mid a = 1) = c^N = 0.05, \qquad \text{よって} \qquad c = 0.05^{1/N}.$$

x の値が小さいことは $a < 1$ を支持する証拠となる。棄却域（rejection region）が $x < c$ となるのはこのためである。

> **?** **考えてみよう** 「$x \le 0.8$ ならば常に棄却される」という条件は、N についてのどのような不等式になるか？

$x \le 0.8$ がすべて棄却されるのは、そのような x がどれも c より小さいとき、すなわち $0.8 < c$ のとき、かつそのときに限る。$t \mapsto t^N$ は $t > 0$ で増加関数であるから、これは次と同値である。

$$0.8^N < c^N = 0.05.$$

したがって、$0.8^N < 0.05$ を満たす最小の整数 N を求めればよい。（N が大きくなると c は 1 に近づいていくので、N が大きいほど検定は棄却しやすくなることに注意する。）

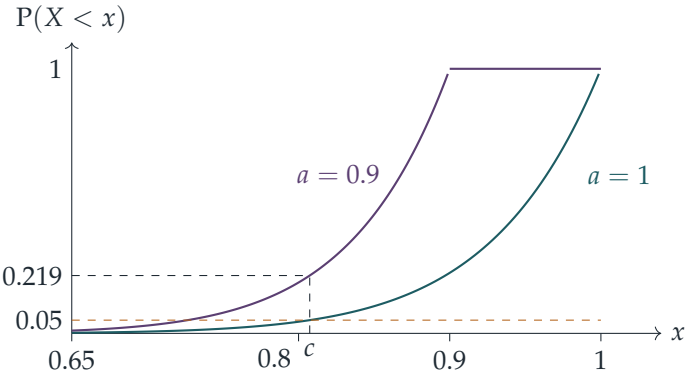
$2^{10} \approx 10^3$ を用いる。 $0.8 = 2^3/10$ と書けば、$0.8^N = 2^{3N}/10^N$ である。

- $N = 13$: $0.8^{13} = \dfrac{2^{39}}{10^{13}} = \dfrac{2^9 \cdot 2^{30}}{10^{13}} \approx \dfrac{512 \times 10^9}{10^{13}} = 0.0512 > 0.05.$
- $N = 14$: $0.8^{14} = \dfrac{2^{42}}{10^{14}} = \dfrac{2^2 \cdot 2^{40}}{10^{14}} \approx \dfrac{4 \times 10^{12}}{10^{14}} = 0.04 < 0.05.$

0.8^N は N が増えると減少するので、$N \le 13$ はすべて条件を満たさない。よって最小値は

$$N = 14.$$

である。（$2^{10} = 1024$ であるから、この近似は 2 の累乗をわずかに小さく見積もっている。真の値 $0.8^{13} \approx 0.0550$ と $0.8^{14} \approx 0.0440$ を用いても同じ結論が得られる。）



$N = 14$ のとき、臨界値は $c = 0.05^{1/14} \approx 0.807$ であり、0.8 をわずかに上回る。

$a = 0.8$ の場合。 すべての数は $[0, 0.8]$ に含まれるので、必ず $X \leq 0.8 < c$ となる。帰無仮説（null hypothesis）は確率 1 で棄却される。

$a = 0.9$ の場合。 このとき $c \approx 0.807 < 0.9$ であるから、

$$\mathrm{P}(\text{棄却}) = \mathrm{P}(X < c \mid a = 0.9) = \left(\frac{c}{0.9}\right)^{14} = \frac{c^{14}}{0.9^{14}} = \frac{0.05}{0.9^{14}}.$$

ここで $0.9^2 = 0.81$、$0.9^4 = 0.6561$、$0.9^8 \approx 0.4305$ であり、したがって $0.9^{14} = 0.9^8 \cdot 0.9^4 \cdot 0.9^2 \approx 0.2288$ である。ゆえに

$$\mathrm{P}(\text{棄却} \mid a = 0.9) = \frac{0.05}{0.9^{14}} \approx 0.219.$$

つまり、14 個の観測値があっても、a が 1 ではなく 0.9 であることをこの検定はたいてい見抜けない。

検算

- モンテカルロ・シミュレーション（Monte Carlo simulation、2×10^5 回の試行）では、小問 (i) について $\mathrm{P}(X \leq 0.8) \approx 0.512$、$\mathrm{E}(X) \approx 0.750$ が得られた。
- 一般に、$[0, 1]$ 上の一様分布に従う n 個の数の最大値の平均は $\frac{n}{n+1}$ である。$n = 1$ のときこれは当然 $\frac{1}{2}$ となり、$n = 3$ のときは $\frac{3}{4}$ となる。
- $N = 14$、$c = 0.05^{1/14}$ のとき、シミュレーションによる棄却率は $a = 1$ のとき約 0.0505（検定のサイズ（size））、$a = 0.9$ のとき約 0.218 であり、$0.05/0.9^{14} = 0.2186$ と一致した。

よくある間違い

- 0.8^N の代わりに $1-0.8^N$ を用いること。最大値が小さい確率は積 0.8^N であり、その余事象の確率ではない。
- $a=0.9$ での棄却確率を $(0.8/0.9)^{14}$ とすること。検定は $x<c$ のときに棄却するのであり、c は 0.8 ではない。
- 0.0512 が「ほぼ 0.05 である」として $N=13$ で止めてしまうこと。必要なのは 0.05 より真に小さいことである。

STEP のその先へ

最大値は**順序統計量**（order statistic）の一つであり、$[0,a]$ 上の一様分布では a に対する**十分統計量**（sufficient statistic）となる。すなわち、標本が a について持つ情報をすべて含んでいる。真の a の関数として見た棄却確率は、その検定の**検出力関数**（power function）と呼ばれる。ここでは $a\le 1$ に対して $\min\{1,\,0.05/a^N\}$ であり、統計学者は検出力関数を比較することで検定を選ぶ。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は最大値と最小値の分布を扱っており、Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）は順序統計量を詳しく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。