解答例

STEP I 2004、第 11 問

力学 ・ 摩擦と蝶番付きのはしご

> **STEP I 2004、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q11

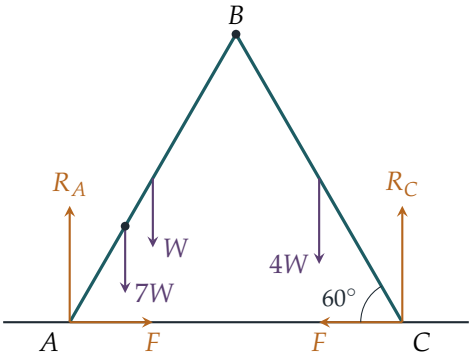
鍵となる考え方

どちらかが滑り出す前は骨組み全体がつり合い（equilibrium）の状態にあるので、二つの垂直抗力（normal reaction）は系全体から求められ、摩擦力（friction）ははしご一本だけを考えれば求められる（ちょうつがいのまわりのモーメントをとれば、未知のちょうつがいの力は消える）。水平方向の外力は二つの摩擦力だけなので、その大きさは等しい。垂直抗力が小さいほうの脚では比 F/R が大きくなる必要があり、先に滑るのはその脚である。

解答

各はしごを長さ $2a$ の一様な棒（uniform rod）、B のちょうつがい（hinge）をなめらか、塗装工を質点（particle）としてモデル化する。$AB = BC$ かつ $\angle ABC = 60^\circ$ であるから、三角形 ABC は正三角形（equilateral triangle）である。よって $AC = 2a$ であり、各はしごは地面と 60° をなす。このとき B は各脚から水平距離 a、地面からの高さ $a\sqrt{3}$ の位置にある。

塗装工が AB の 3 分の 1 の位置まで登ったとき、彼女は A から水平距離 $\frac{1}{3}a$ の位置にいる。AB の中点は A から $\frac{1}{2}a$、BC の中点は A から $\frac{3}{2}a$ の位置にある。



垂直抗力

A、C における垂直抗力をそれぞれ R_A、R_C とする。系全体について鉛直方向の力のつり合いを考えると

$$R_A + R_C = W + 4W + 7W = 12W.$$

系全体について A のまわりのモーメント（moment）をとると（ちょうつがいの力は内力なので現れない）

$$R_C \cdot 2a = W \cdot \tfrac{1}{2}a + 7W \cdot \tfrac{1}{3}a + 4W \cdot \tfrac{3}{2}a = \tfrac{53}{6}Wa,$$

よって

$$R_C = \tfrac{53}{12}W, \qquad R_A = 12W - \tfrac{53}{12}W = \tfrac{91}{12}W.$$

摩擦力

脚は外側に開こうとするので、各脚における摩擦力は内向きにはたらく。系全体について水平方向の力のつり合いを考えると、水平方向の外力は摩擦力だけなので、両者の大きさは等しい。これを F とおく。

F を求めるには、はしご一本だけを考える必要がある。塗装工の乗っていない BC をとり、未知のちょうつがいの力が消えるように B のまわりのモーメントをとる。B のまわりで、抗力 R_C の腕の長さ（lever arm）は a、重さ $4W$ の腕の長さは $\frac{1}{2}a$、摩擦力 F（水平で、地面の高さにはたらく）の腕の長さは $a\sqrt{3}$ である。重さと F は BC を一方向に回し、R_C はその逆向きに回すので

$$R_C \cdot a = 4W \cdot \tfrac{1}{2}a + F \cdot a\sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad F = \frac{R_C - 2W}{\sqrt{3}} = \frac{29W}{12\sqrt{3}}.$$

確認として、AB について B のまわりで同じ計算をすると $R_A \cdot a = W \cdot \frac{1}{2}a + 7W \cdot \frac{2}{3}a + Fa\sqrt{3}$ となり、$F\sqrt{3} = \frac{91}{12}W - \frac{31}{6}W = \frac{29}{12}W$ を得るので、一致する。

どちらのはしごが滑るか

考えてみよう 摩擦力は両脚で等しいのに、どちらが先に滑るかはどうすればわかるだろうか。

ある脚が滑り出す直前の状態にあるのは、必要な摩擦力がその点の垂直抗力の μ 倍に等しくなるときである。両脚とも同じ F を必要とするので、垂直抗力が小さいほうの脚ほど大きな比を必要とする。

$$\frac{F}{R_A} = \frac{29}{91\sqrt{3}} \approx 0.184, \qquad \frac{F}{R_C} = \frac{29}{53\sqrt{3}} \approx 0.316.$$

したがって C が先に限界摩擦（limiting friction）に達する。塗装工が乗っているのは AB であるにもかかわらず、滑るのは**重いほうのはしご** BC なのである。彼女の重さは A を地面にしっかりと押しつけるが、C にかかる荷重はずっと小さい。

それより前に何も滑っていないことも確かめておく必要がある。彼女が全長の割合 t の位置まで登ったとすると、同様の計算により $R_C = (\frac{13}{4} + \frac{7}{2}t)W$、$F\sqrt{3} = R_C - 2W = (\frac{5}{4} + \frac{7}{2}t)W$ となるので

$$\frac{F}{R_C} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{5}{4} + \frac{7}{2}t}{\frac{13}{4} + \frac{7}{2}t} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{2}{\frac{13}{4} + \frac{7}{2}t}\right),$$

これは t について増加する。同様に F/R_A も t について増加する（分子は増加し、分母 $R_A = 12W - R_C$ は減少する）。よって必要な比は彼女が登るにつれて単調に大きくなり、最初の滑りが起こるのは、ちょうど $t = \frac{1}{3}$ において F/R_C が μ に達するときである。ゆえに

$$\mu = \frac{29}{53\sqrt{3}} = \frac{29\sqrt{3}}{159} \approx 0.316.$$

検算

- AB についての B のまわりのモーメントは、BC についての B のまわりのモーメントと同じ F を与える（上で示した）ので、抗力の値は整合している。
- 塗装工がまったくいなければ、BC のほうが重いので R_C は R_A より大きいはずである。実際、このとき A のまわりのモーメントから $R_C = \frac{13}{4}W$、$R_A = \frac{7}{4}W$ が得られ、和は $5W$ となる。
- $R_A = R_C$ となるのは $t = \frac{11}{14}$ のときである。それを超えて初めて AB が滑る側になるので、$t = \frac{1}{3}$ では滑るのは BC でなければならない。
- 数値的に、座標からすべての力を計算し直し（両方のはしごについて B のまわりのモーメントも確認し）てみると、$\mu \approx 0.31591$ となる。

よくある間違い

- 塗装工が乗っているはしごが滑ると思い込むこと。彼女の重さは A における垂直抗力を増やし、その脚をより安定させる。
- はしご一本について脚のまわりのモーメントをとってしまい、未知のちょうつがいの力を持ち込むこと。はしご一本について B のまわりのモーメントをとれば、これを避けられる。
- ちょうつがいのまわりでの摩擦力の腕の長さが $a\sqrt{3}$（B の高さ）であることを忘れること。

STEP のその先へ

これは、部材を連結した構造物の静力学（statics）における基本的な戦略である。まず構造物全体を考えて外部からの抗力を求め、次に連結点で切り離して、一つの部材が担わなければならない力を求めるのである。どの接触点が先に破綻するかという問いは、骨組み構造（frame）の解析や仮想仕事の原理（principle of virtual work）へとつながっていく。後者では、拘束条件と矛盾しない微小な変位を考えることによってつり合いを求める。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の静力学と摩擦を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。