解答例

STEP I 2004、第 10 問

力学 ・ 等加速度運動

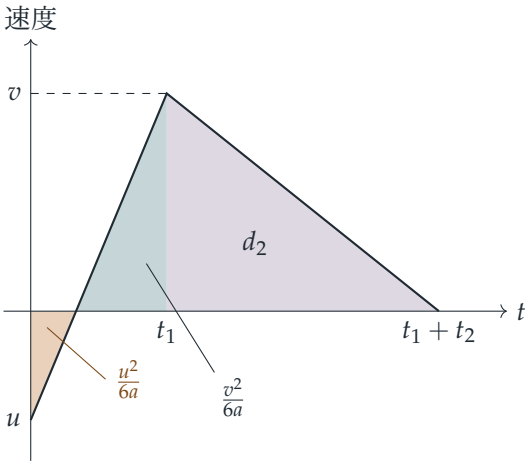
> **STEP I 2004、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q10

鍵となる考え方

ここで扱う運動はすべて等加速度運動（constant acceleration）なので、$v^2 = u^2 + 2as$ と $v = u + at$ だけですべて片がつく。唯一の落とし穴は**距離**（distance）という語である。$u < 0$ のとき、粒子はまず後ろ向きに動き、いったん止まり、それから前向きに加速する。したがって距離 d_1 は単一の変位（displacement）ではなく、二つの部分の和になる。速度–時間グラフ（velocity–time graph）を描くとこのことがはっきりする。距離はグラフと時間軸の間の面積の総和であり、軸より下にある面積も正として数える。

解答

最終速度 v の向きを正の向きとする。第 1 段階では加速度は $+3a$ である（速度を u から $v > u$ まで増加させる）。第 2 段階では加速度は $-a$ であり、速度が 0 になるまで続く。全体を通じて $a > 0$ とする。



このグラフは $u < 0$ の場合を示している。軸より下の小さな三角形が後ろ向きの移動にあたる。

第 2 段階（両方の場合に共通）。 速さ v から減速度（deceleration）a で静止するまで、粒子は一度も向きを変えないので、

$$0 = v^2 - 2ad_2 \quad \Longrightarrow \quad d_2 = \frac{v^2}{2a}.$$

小問 (i)

$u > 0$ ならば、速度は u から v まで増加し、つねに正である。よって距離は変位に等しい：

$$v^2 = u^2 + 2(3a)d_1 \quad \Longrightarrow \quad d_1 = \frac{v^2 - u^2}{6a}.$$

したがって、$u^2 > 0$ より

$$3d_1 = \frac{v^2 - u^2}{2a} < \frac{v^2}{2a} = d_2,$$

となる。ゆえに、示すべきとおり $3d_1 < d_2$ である。

小問 (ii)

今度は $u < 0$ であり、第 1 段階は二つに分かれる。

考えてみよう なぜ再び $v^2 = u^2 + 6ad_1$ を使うだけではいけないのか？

この公式が与えるのは**変位** $\frac{v^2-u^2}{6a}$ である。しかし粒子はまず後ろ向きに動く。加速度 $3a$ のもとで、粒子は速さ $|u|$ から静止まで減速し、その間に $\frac{u^2}{6a}$ だけ進む（$0 = u^2 - 2(3a)s$

より)。その後、静止状態から v まで加速し、$\frac{v^2}{6a}$ だけ進む。距離はこれらの和である：

$$d_1 = \frac{u^2+v^2}{6a}, \qquad \text{よって} \qquad 3d_1 = \frac{u^2+v^2}{2a}.$$

$d_2 = \frac{v^2}{2a}$ および $2d_2 = \frac{2v^2}{2a}$ と比べると、

- $u \neq 0$ より、$3d_1 - d_2 = \dfrac{u^2}{2a} > 0$；
- $v > |u|$ より、$2d_2 - 3d_1 = \dfrac{v^2-u^2}{2a} > 0$。

したがって、示すべきとおり $d_2 < 3d_1 < 2d_2$ である。

平均の速さ

時間は向きに左右されない。第 1 段階では速度が割合 $3a$ で $v-u$ だけ変化し、第 2 段階では割合 a で v だけ変化するので、u の符号によらず

$$t_1 = \frac{v-u}{3a}, \qquad t_2 = \frac{v}{a}, \qquad t_1 + t_2 = \frac{4v-u}{3a},$$

である。

$u > 0$ の場合。全距離は $\frac{v^2-u^2}{6a} + \frac{3v^2}{6a} = \frac{4v^2-u^2}{6a}$ なので、平均の速さ（average speed）は

$$S_+ = \frac{4v^2-u^2}{6a} \cdot \frac{3a}{4v-u} = \frac{4v^2-u^2}{2(4v-u)}.$$

$u < 0$ の場合。$0 < w < v$ として $u = -w$ とおく。全距離は $\frac{v^2+w^2}{6a} + \frac{3v^2}{6a} = \frac{4v^2+w^2}{6a}$、時間は $\frac{4v+w}{3a}$ なので、

$$S_- = \frac{4v^2+w^2}{2(4v+w)}.$$

これらを比べるために、それぞれを $\frac{1}{2}v$ と比較する：

$$S_+ - \tfrac{1}{2}v = \frac{4v^2-u^2-v(4v-u)}{2(4v-u)} = \frac{u(v-u)}{2(4v-u)},$$

$$S_- - \tfrac{1}{2}v = \frac{4v^2+w^2-v(4v+w)}{2(4v+w)} = -\frac{w(v-w)}{2(4v+w)}.$$

第 1 の場合は $0 < u < v$ なので、第 1 式は分子も分母も正であり、$S_+ > \frac{1}{2}v$ となる。第 2 の場合は $0 < w < v$ なので、第 2 式は負であり、$S_- < \frac{1}{2}v$ となる。したがって

$$S_- < \tfrac{1}{2}v < S_+,$$

であり、示すべきとおり $u > 0$ のときのほうが平均の速さは大きい。これは二つの場合で $|u|$ の値が等しいときに限らず、任意の値について成り立つことに注意しよう。$\frac{1}{2}v$ は、同じ v と a をもつすべての $u > 0$ の運動と、すべての $u < 0$ の運動とを分け隔てているのである。

検算

- $v = 2$、$a = 1$ とする。$u = 1$ のとき：$d_1 = \frac{1}{2}$、$d_2 = 2$ なので $3d_1 = 1.5 < 2$ であり、時間は $\frac{7}{3}$ だから $S_+ = \frac{2.5}{7/3} \approx 1.071 > 1$ となる。$u = -1$ のとき：$d_1 = \frac{5}{6}$ なので $2 < 3d_1 = 2.5 < 4$ であり、時間は 3 だから $S_- = \frac{17/6}{3} \approx 0.944 < 1$ となる。運動を一歩ずつ数値シミュレーションしても、これらの値が再現される。
- 極限：$u \to 0$ または $|u| \to v$ のとき、どちらの平均の速さも $\frac{1}{2}v$ に近づく。これは静止から出発して止まるだけの単純な運動の平均の速さである。また、許される範囲の端では不等式が等式になる：両方の小問で $u \to 0$ のとき $3d_1 \to d_2$ となり、小問 (ii) で $u \to -v$ のとき $3d_1 \to 2d_2$ となる。

よくある間違い

- 小問 (ii) で $d_1 = \frac{v^2 - u^2}{6a}$ を使ってしまう。これは変位であり、これを使うと再び $3d_1 < d_2$ が得られてしまい、示すべきことと矛盾する。
- $u < 0$ のときは時間も分けて考える必要があると思ってしまう。その必要はない。$v = u + 3at_1$ は折り返し点をまたいでそのまま成り立つ。

STEP のその先へ

変位と距離の違いは、$\int v\,\mathrm{d}t$ と $\int |v|\,\mathrm{d}t$ の違いである。後者は経路の弧長（arc length）であり、自動車の走行距離計が測っているのはこの量である。大学の力学では、弧長は曲がった軌道を記述するための自然なパラメータとなり、そこから加速度の接線成分と法線成分（tangential and normal components）が導かれる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このような流れで運動学（kinematics）を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。