解答例

STEP I 2004、第 1 問

純粋数学 • 無理数と立方根

> **STEP I 2004、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q1

鍵となる考え方

a, b を整数として $a + b\sqrt{n}$ の形をした数は、小さな数の体系のようにふるまう。すなわち、この形の数を二つ掛け合わせると再び同じ形の数が得られ、またこの形の二つの数が等しいのは、有理数部分（rational part）どうしが一致し、かつ $\sqrt{n}$ の部分どうしが一致するときであり、そのときに限る。小問 (i) はこのような数の 3 乗を計算する準備運動である。小問 (ii) では、部分ごとに比較することでこの過程を逆にたどる。小問 (iii) は x^3 についての二次方程式（quadratic）であり、その解はちょうど (ii) で求めた 3 乗の値になっていることがわかる。

解答

小問 (i)

二項定理（binomial theorem）により、$(2\sqrt{5})^2 = 20$ および $(2\sqrt{5})^3 = 40\sqrt{5}$ を用いると、

$$\begin{aligned}\left(3 + 2\sqrt{5}\right)^3 &= 3^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot 2\sqrt{5} + 3 \cdot 3 \cdot 20 + 40\sqrt{5} \\ &= 27 + 54\sqrt{5} + 180 + 40\sqrt{5} \\ &= 207 + 94\sqrt{5}.\end{aligned}$$

よって $a = 207, b = 94$ である。

小問 (ii)

$\sqrt{5}$ を $\sqrt{2}$ に置き換えて同様に展開すると、任意の c, d に対して

$$\begin{aligned}\left(c - d\sqrt{2}\right)^3 &= c^3 - 3c^2d\sqrt{2} + 3c \cdot 2d^2 - 2d^3\sqrt{2} \\ &= \left(c^3 + 6cd^2\right) - \left(3c^2d + 2d^3\right)\sqrt{2}.\end{aligned}$$

実数の立方根（cube root）はただ一つであるから、$(c - d\sqrt{2})^3 = 99 - 70\sqrt{2}$ となればよい。

> **考えてみよう** なぜ有理数部分と $\sqrt{2}$ の部分を別々に比較してよいのだろうか。

p, q, r, s を整数として $p + q\sqrt{2} = r + s\sqrt{2}$ かつ $q \neq s$ であるとすると、$\sqrt{2} = (p - r)/(s - q)$ は有理数となってしまうが、これは誤りである。したがって $q = s$ であり、このとき $p = r$ となる。ゆえに

$$c^3 + 6cd^2 = 99, \qquad 3c^2d + 2d^3 = 70.$$

が成り立てばよい。c と d は正であるから、第 1 式より $c^3 < 99$ でなければならず、$c \leq 4$ である。$6cd^2 = 99 - c^3$ にそれぞれの値を代入して調べると、

- $c = 1$：$6d^2 = 98$ となり、整数解はない。
- $c = 2$：$12d^2 = 91$ となり、解はない。
- $c = 3$：$18d^2 = 72$ となり、$d = 2$ である。
- $c = 4$：$24d^2 = 35$ となり、解はない。

候補は $c = 3, d = 2$ のみであり、これは第 2 式も満たす：$3 \cdot 9 \cdot 2 + 2 \cdot 8 = 54 + 16 = 70$。したがって

$$\sqrt[3]{99 - 70\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}, \qquad c = 3,\ d = 2.$$

（符号の確認として、$2\sqrt{2} \approx 2.83 < 3$ より $3 - 2\sqrt{2}$ は正であり、$99 - 70\sqrt{2} \approx 0.005$ が正であることと合っている。）

小問 (iii)

$y = x^3$ とおく。方程式は $y^2 - 198y + 1 = 0$ となるので、

$$y = \frac{198 \pm \sqrt{198^2 - 4}}{2} = 99 \pm \sqrt{99^2 - 1} = 99 \pm \sqrt{9800} = 99 \pm 70\sqrt{2},$$

ここで $9800 = 4900 \cdot 2$ を用いた。どちらの値も正の実数である。

小問 (ii) より $99-70\sqrt{2}=(3-2\sqrt{2})^3$ である。もう一方の解については、二次方程式の二つの解の積が 1 であることに注目すると、

$$99+70\sqrt{2}=\frac{1}{99-70\sqrt{2}}=\frac{1}{(3-2\sqrt{2})^3}=\left(3+2\sqrt{2}\right)^3,$$

となる。ここで $(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})=9-8=1$ を用いた。（あるいは、小問 (ii) の展開式で d の符号を変えれば、$(3+2\sqrt{2})^3=99+70\sqrt{2}$ が直接得られる。）

どの実数もただ一つの実数の立方根をもつので、y の各値に対して実数 x がちょうど一つずつ定まる。二つの実数解は

$$x=3-2\sqrt{2}\qquad \text{および}\qquad x=3+2\sqrt{2}.$$

である。この六次方程式（sextic）の残りの四つの解は複素数（complex number）であり、それぞれの y の残りの立方根である。

検算

- 数値的に、$(3+2\sqrt{5})^3\approx 417.19$ であり、$207+94\sqrt{5}\approx 417.19$ である。
- $3+2\sqrt{2}\approx 5.8284$ であり、この値における x^6-198x^3+1 は丸め誤差の範囲でゼロになる。$3-2\sqrt{2}\approx 0.1716$ においても同様である。
- (iii) の二つの答えの積は、当然そうなるべきとおり 1 である。方程式を x^6 で割ると $1/x$ についての同じ方程式が得られるので、x が解ならば $1/x$ も解である。

よくある間違い

- 展開するとき、$(d\sqrt{2})^3=2\sqrt{2}\,d^3$ であって $\sqrt{2}\,d^3$ ではないことを忘れる。
- 第 1 式から $c=3, d=2$ を求めたものの、第 2 式を確かめない。
- (iii) で六つの「解」を答える。正の数の立方根のうち実数であるものは一つだけである。

STEP のその先へ

a,b を整数とする数 $a+b\sqrt{2}$ 全体の集合は環（ring）をなし、$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ と書かれる。$3+2\sqrt{2}$ はこの環の**単数**（unit）である。すなわち、同じ環の中に逆元 $3-2\sqrt{2}$ をもつ。このような単数はペル方程式（Pell's equation）$a^2-2b^2=\pm 1$ と結びついており（$99^2-2\cdot 70^2=1$ に注意）、$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ のすべての単数は $\pm(1+\sqrt{2})^n$ の形をしている。

さらに詳しくは、Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等整数論』）や、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（『環・体・群』）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。