解答例

STEP III 2003、第 9 問

力学 ・ つり合いの安定性

> **STEP III 2003、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q9

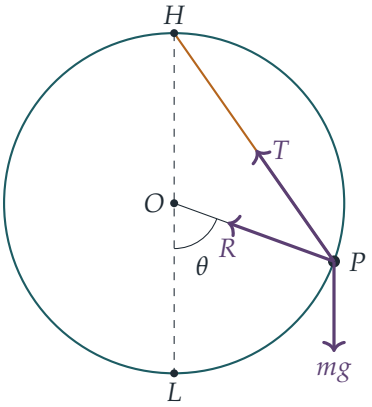
鍵となる考え方

針金は滑らか（smooth）なので、その抗力（reaction）は常に半径方向にはたらき、仕事をしない。したがって、すべては**接線方向**（tangential）で起こる。張力（tension）と重力を接線方向に分解すれば、$\ddot{\theta}$ についての方程式が一つ得られ、そこから平衡（equilibrium）と微小振動（small oscillations）の両方がわかる。必要な角はすべて二等辺三角形（isosceles triangle）OHP の幾何から得られる。

解答

設定

P を滑らかな針金上の質点としてモデル化する。したがって針金からの抗力 R は PO の方向にはたらく。糸は軽く、フックの法則（Hooke's law）に従う。$0 < \theta < \pi$ とし、P は鉛直な直径 LH の一方の側にあるとする。



$OH = OP = a$ であるから、三角形 OHP は $\angle HOP = \pi - \theta$ の二等辺三角形であり、その底角は

$$\angle OHP = \angle OPH = \tfrac{1}{2}\theta, \qquad HP = 2a\cos\tfrac{1}{2}\theta.$$

となる。糸が張っているのは $HP > a$、すなわち $\cos\frac{1}{2}\theta > \frac{1}{2}$ のときであり、このときフックの法則より

$$T = \frac{\alpha mg}{a}(2a\cos\tfrac{1}{2}\theta - a) = \alpha mg(2\cos\tfrac{1}{2}\theta - 1).$$

である。

次に、P における接線に沿って、θ が増加する向き（H に向かう向き）に力を分解する。糸は PO と角 $\frac{1}{2}\theta$ をなすので、この接線とは角 $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\theta$ をなし、その接線成分は $T\sin\frac{1}{2}\theta$ である。重力の接線成分は $-mg\sin\theta$ であり、R の接線成分はない。接線方向の加速度は $a\ddot{\theta}$ であるから、

$$\begin{aligned} ma\ddot{\theta} &= T\sin\tfrac{1}{2}\theta - mg\sin\theta \\ &= mg\left[\alpha(2\cos\tfrac{1}{2}\theta - 1)\sin\tfrac{1}{2}\theta - 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta\right], \end{aligned}$$

となり、糸が張っている間は

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{a}\sin\tfrac{1}{2}\theta\left[2(\alpha - 1)\cos\tfrac{1}{2}\theta - \alpha\right]. \qquad (*)$$

が成り立つ。（エネルギー $\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - mga\cos\theta + \frac{1}{2}\alpha mga(2\cos\frac{1}{2}\theta - 1)^2$ を微分しても同じ方程式が得られる。）

平衡位置

平衡状態では $\ddot{\theta} = 0$ である。$0 < \theta < \pi$ では $\sin\frac{1}{2}\theta \neq 0$ であるから、

$$\cos\tfrac{1}{2}\theta = \frac{\alpha}{2(\alpha - 1)},$$

が必要であり、$\alpha > 1$ なのでこれは意味をもつ。これが $0 < \theta < \pi$ を与えるためには $0 < \cos\frac{1}{2}\theta < 1$ が必要である。この値は正であり、

$$\frac{\alpha}{2(\alpha-1)} < 1 \iff \alpha < 2\alpha - 2 \iff \alpha > 2.$$

である。また、$(*)$ が仮定しているとおり、そこで糸が張っている必要もある。$\dfrac{\alpha}{2(\alpha-1)} > \dfrac{1}{2} \iff \alpha > \alpha - 1$ であり、これは常に成り立つ。よって、$\alpha > 2$ ならば $0 < \theta < \pi$ を満たす平衡位置が存在する。これが示すべきことであった。

考えてみよう 平衡位置で糸がたるんでいたらどうなるか。

その場合、接線成分をもつのは重力だけになり、$-mg\sin\theta = 0$ は $0 < \theta < \pi$ の範囲に解をもたない。だからこそ、求めた平衡位置で $\cos\frac{1}{2}\theta > \frac{1}{2}$ が自動的に成り立つことが重要なのである。

$\alpha = 2+\sqrt{2}$ のときの微小振動

このとき

$$\cos\tfrac{1}{2}\theta = \frac{2+\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

であるから、平衡位置は $\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{4}\pi$、すなわち $\theta = \frac{1}{2}\pi$ であり、P は O と同じ高さにある。$\theta = \frac{1}{2}\pi + \phi$ とおくと $\ddot{\theta} = \ddot{\phi}$ である。$(*)$ を $\ddot{\theta} = \frac{g}{a}f(\theta)$ と書く。ここで $f(\frac{1}{2}\pi) = 0$ である。ϕ が小さいとき

$$f(\tfrac{1}{2}\pi + \phi) \approx f'(\tfrac{1}{2}\pi)\,\phi.$$

である。$(*)$ の角括弧の部分は $\theta = \frac{1}{2}\pi$ で 0 になるので、積の微分法則（product rule）を用いると一つの項だけが残る。

$$f'(\tfrac{1}{2}\pi) = \sin\tfrac{1}{4}\pi \cdot \left[-2(\alpha-1)\cdot\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{4}\pi\right] = -(\alpha-1)\sin^2\tfrac{1}{4}\pi = -\frac{\alpha-1}{2} = -\frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

したがって、ϕ が小さいとき

$$\ddot{\phi} \approx -\frac{g(\sqrt{2}+1)}{2a}\,\phi$$

となり、示すべきことが示された。

最後の小問

ϕ の係数は負であるから、小さな変位を与えると質点は $\theta = \frac{1}{2}\pi$ のまわりで（近似的に）単振動（simple harmonic motion）をする。すなわち、この平衡は安定（stable）である。角振動数（angular frequency）は $\omega = \sqrt{g(\sqrt{2}+1)/(2a)}$ であるから、周期（period）は

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{(\sqrt{2}+1)g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2(\sqrt{2}-1)a}{g}},$$

である。また、エネルギーが保存されるので振幅（amplitude）は小さいままである（針金は滑らかで糸は弾性的であるから、エネルギーを散逸させるものは何もない）。

検算

- $\alpha = 2$ のとき、平衡位置の式は $\cos\frac{1}{2}\theta = 1$、すなわち $\theta = 0$ を与える。平衡位置が最下点と一致することになり、条件 $\alpha > 2$ と整合する。
- $\alpha \to \infty$ のとき $\cos\frac{1}{2}\theta \to \frac{1}{2}$ であるから、$\theta \to \frac{2}{3}\pi$、$HP \to a$ となる。非常に硬い糸はほとんど伸びないということである。
- $a = 1.3\,\mathrm{m}$、$g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ として、$\phi = 0.01$ から完全な方程式 $(*)$ を数値的に解き進めると、周期は約 $2.0819\,\mathrm{s}$ となり、$2\pi\sqrt{2(\sqrt{2}-1)a/g} \approx 2.0818\,\mathrm{s}$ と一致する。

よくある間違い

- $HP = 2a\sin\frac{1}{2}\theta$ としてしまう。これは弦（chord）LP であって HP ではない。三角形 OHP の O における角は $\pi - \theta$ である。
- 平衡位置で糸が張っていることの確認を忘れる。たるんだ糸には張力がはたらかない。
- 接線方向ではなく半径方向に分解してしまう。半径方向の方程式には未知の抗力 R が入り込み、$\ddot{\theta}$ については何も教えてくれない。

STEP のその先へ

平衡位置のまわりで線形化（linearising）して $\ddot{\phi} \approx f'(\theta_0)\,\phi$ とすることは、あらゆる力学系（dynamical system）の安定性を調べる際の標準的な第一歩である。$f'(\theta_0)$ の符号（位置エネルギー（potential energy）でいえば同値的に $V''(\theta_0)$ の符号）によって、振動するか、それとも離れていってしまうかが決まる。大学 1 年次の講義では、これが非線形常微分方程式（nonlinear ODEs）の相平面解析（phase-plane analysis）へと発展する。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、安定な平衡位置のまわりの微小振動を位置エネルギーを用いて非常にわかりやすく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。