解答例

STEP III 2003、第 8 問

純粋数学 ・ 一階微分方程式

> **STEP III 2003、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q8

鍵となる考え方

小問 (i) は陰関数微分（implicit differentiation）の問題であるが、実際にはある工夫の例題になっている。曲線族 $(y+ax)^n(y+bx)=c$ の傾きは、x と y の二つの一次式の比になるのである。小問 (ii) ではこの工夫を逆向きに用いる。一般の曲線族を微分して、傾きを a、b、n で表し、それが与えられた方程式と一致するようにこれらを選ぶ。一致すれば、その式はすべての解曲線（solution curve）に沿って一定となり、その「一定である」という関係こそが一般解（general solution）となる。

解答

小問 (i)

$(y+2x)^3(y-4x)=c$ を、積の微分法（product rule）と合成関数の微分法（chain rule）を用いて x で微分する。$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ を y' と書くと、

$$3(y+2x)^2(y'+2)(y-4x)+(y+2x)^3(y'-4)=0.$$

$y+2x\neq 0$ である点では、$(y+2x)^2$ で割ることができて、

$$3(y'+2)(y-4x)+(y+2x)(y'-4)=0.$$

y' を含む項をまとめると、

$$y'[3(y-4x)+(y+2x)]=-6(y-4x)+4(y+2x),$$
$$y'(4y-10x)=32x-2y,$$

となり、分子と分母を 2 で割ると、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{16x - y}{2y - 5x},$$

となって、示すべき式が得られる。（直線 $y = -2x$ 上では曲線は $c = 0$ のものであり、そこでもこの式は正しい傾き -2 を与える。）

小問 (ii)

y を x の関数として、$F = (y + ax)^n(y + bx)$ とおく。小問 (i) とまったく同様にして、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} &= n(y + ax)^{n-1}(y' + a)(y + bx) + (y + ax)^n(y' + b)\\ &= (y + ax)^{n-1}\Big[\, y'((n+1)y + (nb + a)x) + (na + b)y + (n+1)ab\,x\Big].\end{aligned}$$

したがって、$y = -ax$ 上を除けば、F が曲線に沿って一定であるのは、ちょうど

$$y' = -\frac{(na + b)y + (n+1)ab\,x}{(n+1)y + (nb + a)x}. \qquad (*)$$

が成り立つときである。（小問 (i) は $a = 2$、$b = -4$、$n = 3$ の場合であり、このとき $(32x - 2y)/(4y - 10x)$ が得られる。）

考えてみよう 分数の書き方はいくらでもあるのに、$(*)$ と $\dfrac{10x - 4y}{3x - y}$ をどのように一致させればよいだろうか？

分数は分子と分母に同じ数を掛けても変わらないので、二つの式は共通因数の違いを除いてしか一致させられない。目標の式を $-(4y - 10x)/(y - 3x)$ と書き、分母の y の係数がそろうように、分子と分母に $k = n + 1$ を掛ける。すると次の条件が必要になる。

$$na + b = -4(n+1), \qquad (n+1)ab = 10(n+1), \qquad nb + a = -3(n+1).$$

$n + 1 \neq 0$ であるから（$n = -1$ ならば $(*)$ の分母に y の項がない）、中央の式から $ab = 10$ が得られる。両端の二式を足すと $(n+1)(a+b) = -7(n+1)$ となるので、$a + b = -7$ である。よって a と b は $t^2 + 7t + 10 = 0$ の解、すなわち -2 と -5 である。両端の二式を引くと、

$$(n-1)(a-b) = -(n+1).$$

- $a = -5$、$b = -2$ のとき：$-3(n-1) = -(n+1)$ より $n = 2$。
- $a = -2$、$b = -5$ のとき：$3(n-1) = -(n+1)$ より $n = \frac{1}{2}$。

$(y - 2x)^{1/2}(y - 5x) = c$ を二乗すると $(y - 5x)^2(y - 2x) = c^2$ となるので、どちらの選び方も同じ曲線を表している。平方根を避けるため、$n = 2$ を採用する。

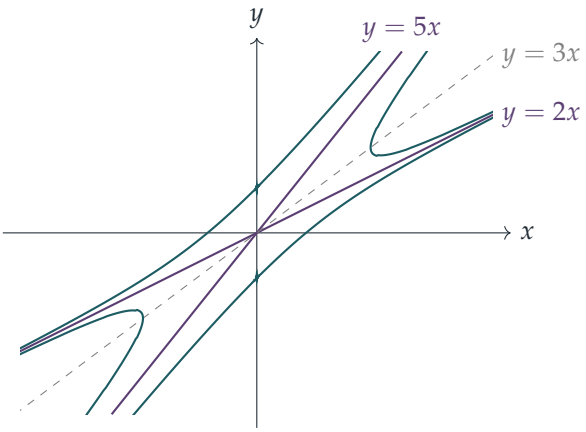
念のため、直接確かめておく。$G=(y-5x)^2(y-2x)$ とすると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}&=(y-5x)\big[2(y'-5)(y-2x)+(y-5x)(y'-2)\big]\\&=(y-5x)\big[3y'(y-3x)-12y+30x\big]\\&=3(y-5x)\big[y'(y-3x)-(4y-10x)\big].\end{aligned}$$

y が微分方程式（differential equation）を満たすならば $y'(y-3x)=4y-10x$ であるから、括弧の中は 0 となり、$\mathrm{d}G/\mathrm{d}x=0$ である。よって G はすべての解曲線上で一定であり、一般解は

$$\boxed{(y-5x)^2(y-2x)=C}$$

である。ただし C は任意定数である。$C=0$ の場合は直線 $y=5x$ と $y=2x$ になる。これらはどちらも実際に解である。$y=2x$ 上では右辺は $2x/x=2$ であり、$y=5x$ 上では $(-10x)/(-2x)=5$ となる。また、どの曲線も、方程式が定義されない直線 $y=3x$ と交わるところで鉛直な接線（vertical tangent）をもつ。



曲線 $(y-5x)^2(y-2x)=\pm1$（ティール）と、$C=0$ に対応する直線の解（プラム）。二直線の間にある枝は、破線 $y=3x$ と交わるところで鉛直な接線をもつ。

小問 (ii) の別解

右辺は y/x のみに依存するので、置換（substitution）$y=vx$ でも解ける。これにより

$$x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{(v-2)(v-5)}{3-v},$$

が得られ、変数分離（separation of variables）と部分分数分解（partial fractions）を用いると $\ln|x|=-\frac{1}{3}\ln|v-2|-\frac{2}{3}\ln|v-5|+$定数 となり、これを整理すると同じ答えになる。問題文の方法を使えば、部分分数分解を避けることができる。

検算

- 小問 (i) は $(*)$ の検算にもなっている。$(*)$ に $a=2$、$b=-4$、$n=3$ を代入すると、そこで求めた傾きが再現される。
- 点 $(1,0)$ において、方程式は傾き $10/3$ を与える。そこで $(y-5x)^2(y-2x)=C$ を陰関数微分すると $(-5)\left[2(y'-5)(-2)+(-5)(y'-2)\right]=0$ となるので、$-9y'+30=0$ より $y'=10/3$ である。
- 数値的にも、ランダムに選んだ 50 個の出発点から、ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で微分方程式を数値的に解き進めた。どの経路に沿っても、$(y-5x)^2(y-2x)$ の値は約 10^{-13} の精度で一定に保たれた。

よくある間違い

- 共通因数を考えずに、$(*)$ の係数を $10x-4y$ と $3x-y$ に直接一致させてしまい、矛盾する方程式を得る。
- 答えを $(y-2x)^{1/2}(y-5x)=c$ のままにして、それが同じ曲線族であることに気づかない。また、符号に注意しないと $y<2x$ となる解も失われる。
- $C=0$ が許されることを忘れ、直線の解 $y=2x$ と $y=5x$ を落とす。

STEP のその先へ

ここで扱った方程式は**同次形**（homogeneous）である。すなわち、右辺が y/x のみに依存する。解に沿って一定となる関数 $G(x,y)$ を探すという考え方は、**完全微分方程式**（exact equations）や**積分因子**（integrating factors）の背後にある考え方である。力学では、同じ考え方がエネルギーのような保存量（conserved quantities）を探すことにあたる。どちらも Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）の初めのほうで扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。