解答例

STEP III 2003、第 7 問

純粋数学 ・ シムソン線

> **STEP III 2003、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q7

鍵となる考え方

垂線の足（foot of the perpendicular）は、P から直線の法線（normal）に沿って進み、直線にぶつかるところとして求められる。そこで $N = P + \lambda(\text{法線})$ とおき、λ について解く。後半では、s と t に関する条件は 2 つの傾き（gradient）の積が -1 に等しいという形をしており、これは PA と PB が垂直であることを意味する。この条件を円の方程式に書き直すと、まさにそれによって共線性（collinearity）の確認が一気に片づく。

解答

N の座標

直線 AB の方程式は $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$、すなわち

$$bx + ay = ab.$$

である。この直線の法線ベクトル（normal vector）は (b, a) であるから、P から下ろした垂線の足 N は、ある λ を用いて

$$N = (s + \lambda b,\ t + \lambda a)$$

の形に書ける。N は AB 上にあるので、

$$b(s + \lambda b) + a(t + \lambda a) = ab \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{ab - bs - at}{a^2 + b^2}.$$

したがって

$$x = s + \lambda b = \frac{s(a^2+b^2) + ab^2 - b^2 s - abt}{a^2+b^2} = \frac{ab^2 - abt + a^2 s}{a^2+b^2} = \frac{ab^2 - a(bt-as)}{a^2+b^2},$$
$$y = t + \lambda a = \frac{t(a^2+b^2) + a^2 b - abs - a^2 t}{a^2+b^2} = \frac{a^2 b + b^2 t - abs}{a^2+b^2} = \frac{a^2 b + b(bt-as)}{a^2+b^2},$$

となり、求める結果が得られた。

N は XY 上にある

まず、条件が何を意味するかを確認する。条件が意味をもつためには $s \neq 0$ かつ $s \neq a$ が必要であり、さらに積が 0 ではなく -1 であることから $t \neq 0$ かつ $t \neq b$ も必要である。展開すると

$$t(t-b) = -s(s-a) \quad \Longleftrightarrow \quad s^2 + t^2 = as + bt. \qquad (*)$$

となる。

さて、$X = (s, 0)$、$Y = (0, t)$ である。$s \neq 0$ かつ $t \neq 0$ であるから、これらは原点以外の異なる 2 点であり、直線 XY は

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{t} = 1, \qquad \text{すなわち} \qquad tx + sy = st.$$

である。よって、N の座標について $tx + sy = st$ が成り立つことを示せばよい。

> **考えてみよう** 代入してうまくいくことを祈るべきか、それとも計算をすっきり整理する方法があるだろうか。

式を短くするために $k = bt - as$ とおく。上の式を用いると、

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(tx+sy) &= t(ab^2 - ak) + s(a^2 b + bk) \\ &= ab^2 t + a^2 bs + k(bs - at).\end{aligned}$$

最後の積はきれいに展開できる：

$$k(bs-at) = (bt-as)(bs-at) = b^2 st - abt^2 - abs^2 + a^2 st = (a^2+b^2)st - ab(s^2+t^2).$$

したがって

$$(a^2+b^2)(tx+sy) = (a^2+b^2)st + ab(as + bt - s^2 - t^2).$$

これはすべての P について成り立つ。$(*)$ より括弧の中は 0 であるから $tx + sy = st$ となり、N は直線 XY 上にある。

幾何学的な解釈

PB の傾きは $\dfrac{t-b}{s}$、PA の傾きは $\dfrac{t}{s-a}$ であるから、条件は $PA \perp PB$、すなわち角 APB が直角であることを表す。同値な言い方をすれば、$(*)$ は

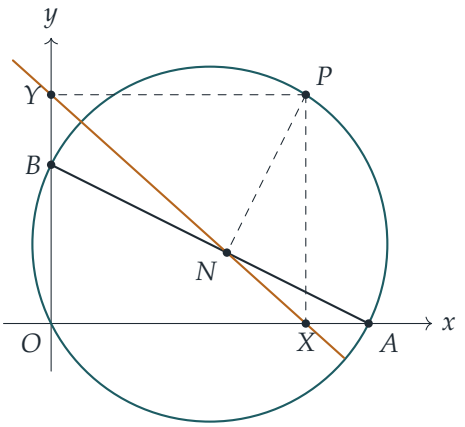
$$\left(s-\tfrac{a}{2}\right)^2+\left(t-\tfrac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4},$$

であり、P は AB を直径（diameter）とする円上にある。角 AOB も直角であるから、この円は O を通る。つまりこれは**三角形 OAB の外接円**（*circumcircle*）である。

点 X、Y、N は、P から三角形の 3 辺 OA、OB、AB に下ろした垂線の足である。したがって、この結果は次のことを述べている：

P が三角形の外接円上にあるならば、P から 3 辺（必要なら延長する）に下ろした垂線の足は同一直線上にある。

これは**シムソン線**（Simson line）の定理であり、ここでは直角を原点に置いた直角三角形の場合について証明したことになる。



$a=4$、$b=2$ の場合：P は O、A、B を通る円上にあり、直線 XY（琥珀色）は N を通る。

検算

- $P=O$、すなわち $s=t=0$ とおくと、式から $N=\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$ が得られる。これは $bx+ay=ab$ 上にあり、かつ O を通り AB に垂直な直線 $y=\frac{a}{b}x$ 上にもあり、期待どおりである。
- $a=4$、$b=2$ とし、円上の点 $P=(2+\sqrt{5}\cos 1,\ 1+\sqrt{5}\sin 1)\approx(3.208,2.882)$ をとると、式から $N\approx(2.214,0.893)$ が得られ、$\frac{2.214}{3.208}+\frac{0.893}{2.882}\approx 0.690+0.310=1$ となる

ので、N は XY 上にある。

- 恒等式 $(a^2+b^2)(tx+sy-st) = ab(as+bt-s^2-t^2)$ からは逆（converse）も得られる：座標軸上にない P について、N が XY 上にあるのは P が円上にある場合に限る。

よくある間違い

- AB の法線として (a,b) を用いてしまう。AB の方向は $(-a,b)$ であるから、法線は (b,a) である。
- すべてを一度に展開して計算に溺れてしまう。与えられた答えが示唆しているように $bt-as$ を 1 つの文字としてまとめれば、計算は数行で済む。
- 「角 APB は直角である」で止めてしまう。問題が求めている解釈はシムソン線である：X、Y、N は三角形 OAB の 3 辺に下ろした垂線の足である。

STEP のその先へ

シムソン線は任意の三角形について成り立ち、総合的証明（synthetic proof）では円に内接する四角形（cyclic quadrilateral）と同じ弧に対する円周角が等しいことを用いる。その逆も成り立ち、さらに P が外接円を一周するとき、シムソン線の包絡線（envelope）はデルトイド（deltoid、シュタイナー（Steiner）の内サイクロイド（hypocycloid））を描く。座標や複素数を用いる方法を使えば、こうした結果は機械的に導ける。Needham の *Visual Complex Analysis*（複素解析を視覚的に扱った本）は複素数が円の幾何をいかに見事に扱えるかを示しており、コクセター（Coxeter）と Greitzer の *Geometry Revisited*（初等幾何の再訪）はシムソン線をはじめ、古典的な三角形の幾何を幅広く扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。