解答例

STEP III 2003、第 6 問

純粋数学 • 望遠鏡型の三角関数の和

STEP III 2003、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/03-s3-q6

鍵となる考え方

角が等間隔で増えていく余弦の和は、そのままでは扱いにくい。しかし各項に $2\sin\frac{1}{2}\theta$ を掛けると、それぞれの余弦が二つの正弦の**差**に変わり、和は打ち消し合って縮む（telescoping）。残るのは二つの正弦の差であり、これは和積公式（factor formula）によって積に直せる。積を零とおく方程式は解きやすい。ただ一つ注意すべきなのは、掛けた $\sin\frac{1}{2}\theta$ 自身が零になりうることである。

解答

恒等式

$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B$ において $A=r\theta$、$B=\frac{1}{2}\theta$ とおくと、

$$\sin\left(r+\tfrac{1}{2}\right)\theta-\sin\left(r-\tfrac{1}{2}\right)\theta=2\cos r\theta\,\sin\tfrac{1}{2}\theta,$$

となり、これが求める恒等式（identity）である。

級数の和

$$S(\theta)=\sum_{r=a}^{b-1}\cos r\theta.$$

とおく。$2\sin\frac{1}{2}\theta$ を掛け、a から $b-1$ までの各 r について恒等式を用いると、

$$\begin{aligned}2\sin\tfrac{1}{2}\theta\,S(\theta)&=\sum_{r=a}^{b-1}\left[\sin\left(r+\tfrac{1}{2}\right)\theta-\sin\left(r-\tfrac{1}{2}\right)\theta\right]\\&=\sin\left(b-\tfrac{1}{2}\right)\theta-\sin\left(a-\tfrac{1}{2}\right)\theta,\end{aligned}$$

となる。各 $\sin(r+\frac{1}{2})\theta$ が次の項の $-\sin((r+1)-\frac{1}{2})\theta$ と打ち消し合い、最後の項の上端と最初の項の下端だけが残るからである。

次に $\sin P - \sin Q = 2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$ を、$\frac{P+Q}{2} = \frac{1}{2}(a+b-1)\theta$、$\frac{P-Q}{2} = \frac{1}{2}(b-a)\theta$ として用いると、

$$\sin\tfrac{1}{2}\theta\, S(\theta) = \cos\tfrac{1}{2}(a+b-1)\theta\ \sin\tfrac{1}{2}(b-a)\theta. \qquad (*)$$

$S(\theta) = 0$ を解く

> **考えてみよう** $(*)$ をそのまま $\sin\frac{1}{2}\theta$ で割ってよいだろうか？

割ってよいのは $\sin\frac{1}{2}\theta \neq 0$ のとき、すなわち θ が 2π の倍数でないときに限る。そこで、まずそのような値を処理しておく。整数 m に対して $\theta = 2m\pi$ ならば、すべての項 $\cos r\theta$ が 1 に等しいので、$S(\theta) = b - a \geq 2$ である。したがって、これらの値は決して解にならない。

それ以外のすべての θ では $\sin\frac{1}{2}\theta \neq 0$ であり、$(*)$ より

$$S(\theta) = 0 \iff \cos\tfrac{1}{2}(a+b-1)\theta = 0 \ \text{ または } \ \sin\tfrac{1}{2}(b-a)\theta = 0.$$

- $\cos\frac{1}{2}(a+b-1)\theta = 0$ となるのは、ちょうど $\frac{1}{2}(a+b-1)\theta = \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$ のとき、すなわち
$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{a+b-1}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$
のときである（$a+b-1 \geq 3$ なので、零で割っているわけではないことに注意）。これらはいずれも 2π の倍数ではない。もしそうなら $2k+1 = 2m(a+b-1)$ となり、奇数が偶数に等しいことになってしまう。よって、これらはすべて解である。
- $\sin\frac{1}{2}(b-a)\theta = 0$ となるのは、ちょうど $\frac{1}{2}(b-a)\theta = k\pi$ のとき、すなわち
$$\theta = \frac{2k\pi}{b-a}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$
のときである。これが 2π の倍数になるのは、ちょうど $b-a$ が k を割り切るときであり、そのような値が解にならないことはすでに見た。したがって、それらは除外しなければならない。

> **考えてみよう** $(*)$ は成り立っているように見えるのに、なぜ二つ目の族から 2π の倍数を取り除かなければならないのだろうか？

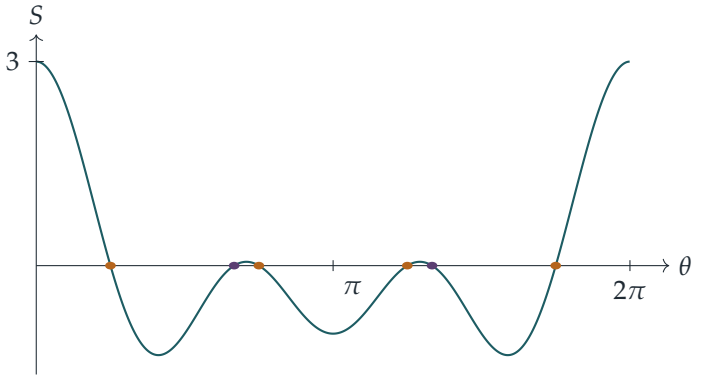
$\theta = 2m\pi$ では、S が何であっても $(*)$ の両辺はともに零になるので、そこでは $(*)$ は S について何も教えてくれない。これは $\sin\frac{1}{2}\theta$ を両辺に掛けたことで生じた見せかけの手がかりだったのである。$b-a \geq 2$ であるから、二つ目の族にも $\theta = 2\pi/(b-a)$ のような本物の解がちゃんと含まれている。

以上をまとめると、解はちょうど

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{a+b-1} \ (k \in \mathbb{Z}) \qquad \text{または} \qquad \theta = \frac{2k\pi}{b-a} \ (k \in \mathbb{Z},\ b-a \nmid k).$$

である。二つの族は重なることがある。しかし両方に属する値も一つの解にすぎないので、差し支えはない。

たとえば $a=1$、$b=4$ のとき、方程式は $\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta=0$ となる。$(0,2\pi)$ における根は、一つ目の族から $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$、二つ目の族から $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ である。$S=3$ となる $\theta=0$ と $\theta=2\pi$ が除かれていることに注意しよう。



曲線 $S=\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta$。琥珀色の根は余弦の因数から、プラム色の根は正弦の因数から生じる。

検算

- $a=1$、$b=4$ のとき、$\theta=\frac{\pi}{4}$ では $\frac{\sqrt{2}}{2}+0-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$、$\theta=\frac{2\pi}{3}$ では $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=0$ となる。
- 数値的に、多くの組 a,b について、無作為に選んだ θ で $(*)$ が成り立つ。$1\le a\le 6$、$a+2\le b\le 11$ のすべてについて、$(0,6\pi)$ 上で S を細かく走査すると、公式が与える根がちょうど見つかり、それ以外の根は見つからない。たとえば $a=1$、$b=3$ のとき、根 $\theta=13\pi/3\approx 13.6136$ は一つ目の族から得られる。

よくある間違い

- 確認せずに $(*)$ を $\sin\frac{1}{2}\theta$ で割り、$\theta=2m\pi$ を解に含めてしまう。そこでは $S=b-a\neq 0$ である。

- 打ち消し合う和の端の項を間違える。最後の余弦は $\cos(b-1)\theta$ なので、端の項は $\sin\left(b-\frac{1}{2}\right)\theta$ と $\sin\left(a-\frac{1}{2}\right)\theta$ である。
- 問題はすべての解を求めているのに、$[0, 2\pi)$ のような一つの区間内の解だけを答える。

STEP のその先へ

$\sum \cos r\theta$ の閉じた式は、$e^{i\theta}$ の等比級数（geometric series）の実部である。$a = -n$、$b = n+1$ とおくと、**ディリクレ核**（Dirichlet kernel）$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta / \sin\frac{1}{2}\theta$ が得られる。これはフーリエ級数（Fourier series）の理論、そしてその収束（convergence）の問題の核心にあるものである。このような三角関数の和が $e^{i\theta}$ を用いるとなぜ簡単になるのかを知るには、Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。