解答例

STEP III 2003、第 5 問

純粋数学 • 3 次方程式の解

STEP III 2003、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/03-s3-q5

鍵となる考え方

グラフを見て根を数える。最高次の係数（leading coefficient）が正の二次式（quadratic）のグラフが x 軸と 2 回交わるのは、その最小値が軸より下にあるときであり、またそのときに限る。最高次の係数が正の三次式（cubic）のグラフが 3 回交わるのは、その極大値が軸より上にあり、極小値が軸より下にあるときであり、またそのときに限る。すべての根（root）を正にするには、極値をとる点（turning point）が y 軸のどちら側にあるか、そして曲線が y 軸と交わる点での符号に注目する。最後の方程式は、平行移動した三次式の場合が姿を変えたものである。立方完成（completing the cube）によってその形に直せばよい。

解答

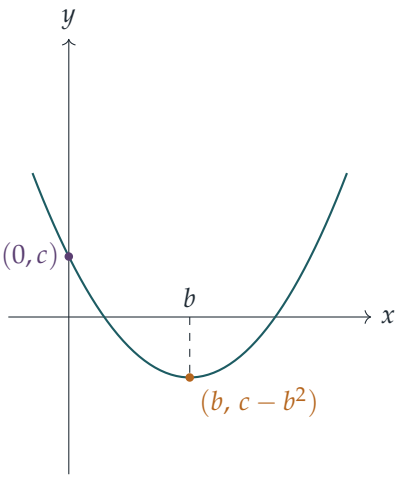
二次式

平方完成（completing the square）すると

$$y = x^2 - 2bx + c = (x-b)^2 + c - b^2,$$

となるので、極値をとる点（最小値）は $(b,\ c-b^2)$ である。

相異なる 2 つの実数解をもつとき、曲線は $x = b$ に関して対称な $\cup$ 字型の放物線で、その頂点は x 軸より下にある。曲線は y 軸と $(0, c)$ で交わる。



相異なる2つの実数解。この放物線の最高次の係数は正なので、$x \to \pm\infty$ のとき $y \to +\infty$ であり、その最小値は $c - b^2$ である。$c - b^2 < 0$ ならば、曲線は $x = b$ の両側で軸の下に沈んでから再び上がるので、2回交わる。$c - b^2 = 0$ ならば曲線は軸にちょうど接し（重根（repeated root））、$c - b^2 > 0$ ならば軸と決して交わらない。したがって条件は

$$b^2 > c.$$

である。

相異なる2つの正の解。条件は

$$b^2 > c, \qquad b > 0, \qquad c > 0.$$

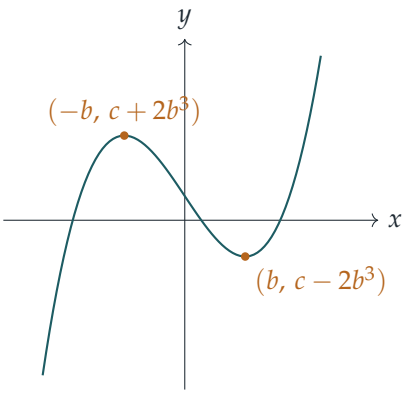
であると主張する。**必要性（necessary）：**根 α, β は $\alpha + \beta = 2b$ および $\alpha\beta = c$ を満たし、両方が正ならばこれらはともに正である。**十分性（sufficient）：**$b^2 > c$ ならば根は2つあり、$x = b$ の両側に1つずつある。$b > 0$ なので、右側の根は正である。左側の根は曲線が減少する区間にある。曲線は $x = 0$ で正（高さ $c > 0$）であり、$x = b > 0$ で負であるから、この根は0と b の間に厳密に含まれ、やはり正である。

三次式

$y = x^3 - 3b^2x + c$ について $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 - 3b^2 = 3(x - b)(x + b)$ であり、これは $x = \pm b$ で0になる。代入すると

$$x = -b:\ y = -b^3 + 3b^3 + c = c + 2b^3, \qquad x = b:\ y = b^3 - 3b^3 + c = c - 2b^3.$$

$b > 0$ なので、極値をとる点は $(-b,\ c + 2b^3)$ における極大と $(b,\ c - 2b^3)$ における極小である。実際、導関数は $x < -b$ で正、その間で負、$x > b$ で正である。



曲線は $-\infty$ から極大まで上がり、極小まで下がり、それから $+\infty$ まで上がる。そしてこの 3 つの部分のそれぞれで狭義単調（strictly monotonic）である。したがって、各部分に 1 つずつ根をもち、相異なる 3 つの根をもつのは、極大値が軸より上にあり極小値が軸より下にあるときであり、またそのときに限る：

$$c+2b^3>0 \text{ かつ } c-2b^3<0, \qquad \text{すなわち} \qquad -2b^3<c<2b^3.$$

どちらかの極値が 0 ならば重根が生じ、両方が同じ符号（厳密に正または負）ならば実数解は 1 つしかない。よって $|c|<2b^3$ が必要十分条件である。

平行移動した三次式の相異なる 3 つの正の根

曲線 $y=(x-a)^3-3b^2(x-a)+c$ は、前の曲線を右に a だけ平行移動（translation）したものである（引き続き $b>0$ とする）。したがって、この曲線が相異なる 3 つの実数解をもつのは $|c|<2b^3$ のときであり、またそのときに限る。そのとき極大は $x=a-b$、極小は $x=a+b$ にあり、根 $x_1<x_2<x_3$ は

$$x_1<a-b<x_2<a+b<x_3.$$

を満たす。3 つすべてが正であるのは、最小の根 x_1 が正であるときであり、またそのときに限る。曲線が y 軸と交わる高さを

$$y(0)=(-a)^3-3b^2(-a)+c=c-a^3+3ab^2$$

と書く。条件は

$$|c|<2b^3, \qquad a>b, \qquad c<a^3-3ab^2.$$

であると主張する。

考えてみよう なぜ「$y(0)<0$」だけでは、3 つの根すべてを原点の右側に置くのに十分でないのだろうか？

y は x_2 と x_3 の間でも負だからである。$x=0$ での値が負であることは、原点が真ん中の根と最大の根の間にあることを意味しているかもしれない。0 が曲線の最初の上昇部分、つまり極大の左側にあることも知る必要がある。それが $a>b$ の役割である。

必要性。相異なる 3 つの正の根があるとする。すると前の部分より $|c|<2b^3$ である。また $0<x_1<a-b$ なので $a>b$ である。最後に、y は $(-\infty, a-b]$ で狭義単調増加で $y(x_1)=0$ であり、$0<x_1$ だから $y(0)<0$ である。これより $c<a^3-3ab^2$ が得られる。

十分性。3 つの条件がすべて成り立つとする。相異なる 3 つの実数解があり、$0<a-b$ なので、0 は y が狭義単調増加である $(-\infty, a-b]$ に含まれる。$y(0)<0=y(x_1)$ であるから $0<x_1$ となり、したがって 3 つの根はすべて正である。

よって、この方程式が相異なる 3 つの正の根をもつのは

$$a>b \quad \text{かつ} \quad -2b^3<c<\min(2b^3,\ a^3-3ab^2).$$

のときであり、またそのときに限る。($a>b>0$ のとき $a^3-3ab^2+2b^3=(a-b)^2(a+2b)>0$ なので、c に対するこれらの範囲は矛盾しない。)

最後の方程式

2 で割り、立方完成する。$(x-a)^3$ の x^2 の項は $-3ax^2$ なので、$3a=\frac{9}{2}$、すなわち $a=\frac{3}{2}$ とする必要がある。$x=t+\frac{3}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned} x^3-\tfrac{9}{2}x^2+\tfrac{7}{2}x-\tfrac{1}{2} &= t^3+(\tfrac{27}{4}-\tfrac{27}{2}+\tfrac{7}{2})t+(\tfrac{27}{8}-\tfrac{81}{8}+\tfrac{21}{4}-\tfrac{1}{2}) \\ &= t^3-\tfrac{13}{4}t-2, \end{aligned}$$

となる。ここで t^2 の項は a の選び方により打ち消し合う。したがって

$$2x^3-9x^2+7x-1=0 \iff (x-\tfrac{3}{2})^3-3b^2(x-\tfrac{3}{2})+c=0, \qquad a=\tfrac{3}{2},\ b^2=\tfrac{13}{12},\ c=-2,$$

であり、$b=\sqrt{13/12}>0$ である。では 3 つの条件を確かめよう。

- $|c|<2b^3$：これは $2<2b^3$、すなわち $b^2>1$ ということであり、$b^2=\frac{13}{12}>1$ なので成り立つ。
- $a>b$：両方とも正で、$a^2=\frac{9}{4}=\frac{27}{12}>\frac{13}{12}=b^2$ である。
- $c<a^3-3ab^2$：ここで $a^3-3ab^2=a(a^2-3b^2)=\frac{3}{2}(\frac{9}{4}-\frac{13}{4})=-\frac{3}{2}$ であり、$-2<-\frac{3}{2}$ である。

3 つすべてが成り立つので、$2x^3-9x^2+7x-1=0$ は、示すべきとおり相異なる 3 つの正の根をもつ。

検算

- 符号の変化（sign change）によって最終的な答えを直接確かめられる。$p(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x - 1$ とすると、$p(0) = -1$、$p(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$、$p(1) = -1$、$p(3) = -7$、$p(4) = 11$ である。したがって根は $(0, \frac{1}{2})$、$(\frac{1}{2}, 1)$、$(3, 4)$ にある。数値的には 0.185、0.760、3.555 である。
- 値 $y(0) = c - a^3 + 3ab^2 = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ は、当然そうなるべきとおり、モニック（monic）な三次式 $x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{1}{2}$ の定数項と一致する。
- (a, b, c) を何千通りも無作為に選んで試したところ、毎回上に述べた条件と一致した。

よくある間違い

- 正であることの条件として $y(0) < 0$ だけ（あるいは $a > b$ だけ）を使ってしまう。両方が必要である。$y(0) < 0$ は、原点が大きい方の 2 つの根の間にあるときにも成り立つ。
- $|c| \leq 2b^3$ で等号が成り立つと重根が生じるので、「相異なる 3 つの根」ではなくなることを忘れる。
- 平行移動の向きを逆にしてしまう。$x - a$ で表された曲線は、元の曲線を**右に** a だけ動かしたものである。

STEP のその先へ

どんな三次式も、ここでしたように平行移動によって「還元」形（depressed form）$t^3 + pt + q$ に直すことができる。すると相異なる 3 つの実数解をもつのは、$4p^3 + 27q^2 < 0$ のときであり、またそのときに限る。$p = -3b^2$、$q = c$ とすれば、これは上で求めた条件 $c^2 < 4b^6$ になる。量 $-(4p^3 + 27q^2)$ は**判別式**（discriminant）であり、三次方程式がどのように解かれたか（カルダノ（Cardano）の公式）、そしてやがてはガロア理論（Galois theory）へと至る物語の出発点である。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は、その理論へ向かう次の一歩として良い本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。