解答例

STEP III 2003、第 4 問

純粋数学 ・ 媒介変数表示された曲線の接線

> **STEP III 2003、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q4

鍵となる考え方

直線とこの曲線の交点は、媒介変数（parameter）についての**三次式**（cubic）が 0 となるところである。接線は t に重根（double root）を与えるので、解の和からただちに第三の解 T がわかる。すると T の式は tan の倍角の公式（double-angle formula）とそっくりの形をしており、$t = \tan\theta$ とおくことが示唆される。こうすると写像 $t \mapsto T$ は角度に関する単純な一次写像となり、その反復は容易である。

解答

T の式

$y = t + t^3$ は t について狭義単調増加であるから、異なる媒介変数の値は異なる点を与える。したがって、曲線上の点と媒介変数の値は一対一に対応する。

微分すると $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t$、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1 + 3t^2$ であるから、$t \neq 0$ のとき、t における接線（tangent）の傾きは

$$m = \frac{1 + 3t^2}{2t}.$$

である（$t \neq 0$ なので接線は鉛直ではない）。その方程式は $y - (t + t^3) = m(x - t^2)$ である。媒介変数 s の点がこの直線上にあるのは、ちょうど

$$s + s^3 - (t + t^3) = m(s^2 - t^2), \qquad \text{すなわち} \qquad f(s) \equiv s^3 - ms^2 + s - (t + t^3 - mt^2) = 0.$$

となるときである。明らかに $f(t) = 0$ であり、m の選び方から $f'(t) = 3t^2 - 2mt + 1 = 0$ である。よって $s = t$ はこの三次方程式の（少なくとも）重根であり、ある実数 T を

用いて解は t, t, T と表される。$s^3 - ms^2 + \ldots$ の解の和は m であるから、

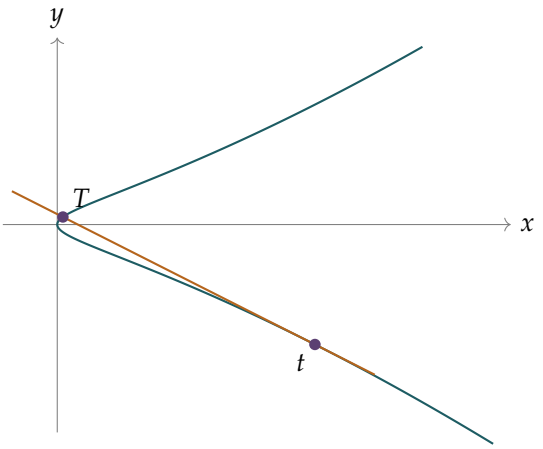
$$2t + T = \frac{1+3t^2}{2t}$$
$$T = \frac{1+3t^2-4t^2}{2t} = \frac{1-t^2}{2t}.$$

この解 T が、直線が曲線と交わりうる唯一の他の点である。

接線が曲線と**再び**交わるのは $T \neq t$ のときに限る。ここで

$$T = t \iff 1 - t^2 = 2t^2 \iff 3t^2 = 1,$$

であるから、$3t^2 \neq 1$ が必要である（$3t^2 = 1$ のときは解 t が三重根となり、接線は曲線と一度しか接しない。これらは変曲点（points of inflection）である）。以上で両方の結果が示された。



$t_0 = \tan\frac{7}{18}\pi$ から始まる数列

$t = \tan\theta$ とおく。倍角の公式により

$$T = \frac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta} = \frac{1}{\tan 2\theta} = \cot 2\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right).$$

である。よって $t_i = \tan\theta_i$ ならば $\theta_{i+1} = \frac{\pi}{2} - 2\theta_i$ ととることができる。tan は周期（period）π をもち、長さ π の任意の区間上で（$\frac{\pi}{2}$ の奇数倍を除いて）一対一であるから、二つの媒介変数の値が等しいのは、対応する角の差が π の倍数であるときに限る。

考えてみよう 反復を始める前に、次の点が存在するためには各 t_i について何を確かめなければならないだろうか。

この構成には、各段階で $t_i \neq 0$ かつ $3t_i^2 \neq 1$ であること、すなわち θ_i が $\frac{\pi}{2}$ の倍数でなく、かつ $\pm\frac{\pi}{6}$ に π の倍数を加えたものでもないことが必要である。$\frac{\pi}{18}$ を単位として表せば、18 を法として $0, \pm 3, \pm 9$ を避けなければならない。

$\theta_0 = \frac{7\pi}{18}$ から始めると、

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{9\pi}{18} - \frac{14\pi}{18} = -\frac{5\pi}{18},\\ \theta_2 &= \frac{9\pi}{18} + \frac{10\pi}{18} = \frac{19\pi}{18} \equiv \frac{\pi}{18} \pmod{\pi},\\ \theta_3 &= \frac{9\pi}{18} - \frac{2\pi}{18} = \frac{7\pi}{18}.\end{aligned}$$

$7, -5, 1$ はいずれも禁止された値ではないので、すべての段階が有効である。したがって $t_3 = \tan\frac{7\pi}{18} = t_0$ となり、$P_3 = P_0$ である。一方、$\theta_1 - \theta_0 = -\frac{12\pi}{18}$ は π の倍数ではないので、$t_1 = \tan(-\frac{5\pi}{18}) < 0 < t_0$ であり、$P_1 \neq P_0$ である。三つの点の媒介変数は $\tan 70^\circ$、$-\tan 50^\circ$、$\tan 10^\circ$ である。

二つ目の初期値

$g(\theta) = \frac{\pi}{2} - 2\theta$ とおく。反復すると

$$g^2(\theta) = -\frac{\pi}{2} + 4\theta, \qquad g^3(\theta) = \frac{3\pi}{2} - 8\theta.$$

となる。よって $P_3 = P_0$ となるのは $\frac{3\pi}{2} - 8\theta \equiv \theta \pmod{\pi}$、すなわち $9\theta \equiv \frac{3\pi}{2} \pmod{\pi}$ のときに限り、これより

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{9} = \frac{(3+2k)\pi}{18}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

を得る。同様に、$P_1 = P_0$ となるのは $3\theta \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$、すなわち $\theta = \frac{(3+6j)\pi}{18}$ のときに限る。これらはちょうど $3 + 2k \equiv 3, 9, 15 \pmod{18}$ の場合であり、$t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ を与えるか、有限の t をまったく与えないので、いずれにせよ除外される。

残るのは、π を法として $\theta \in \{\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}\}$ である。$t_0 > 0$ であるためには $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ が必要であり、$\tan\frac{\pi}{18}$、$\tan\frac{5\pi}{18}$、そして与えられた $\tan\frac{7\pi}{18}$ を得る。$\tan\frac{\pi}{18}$ は上の周期における P_2 にすぎない。本当に新しい周期を与える値は

$$t_0 = \tan\frac{5\pi}{18} \ (= \tan 50^\circ),$$

であり、$\theta_0 = \frac{5\pi}{18}$、$\theta_1 = -\frac{\pi}{18}$、$\theta_2 = \frac{11\pi}{18}$、$\theta_3 = \frac{9\pi}{18} - \frac{22\pi}{18} = -\frac{13\pi}{18} \equiv \frac{5\pi}{18}$ となる。$5, -1, 11$ はいずれも禁止された値ではなく、$t_1 = -\tan 10^\circ \neq t_0$ である。$\tan\frac{5\pi}{18}$ と $\tan\frac{\pi}{18}$ のどちらも問いの答えとなる。

考えてみよう 角度を「π を法として」扱ってよいのはなぜだろうか。

用いているのは $t = \tan\theta$ だけであり、$\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$ だからである。θ_i に π を加えると $g(\theta_i)$ は 2π だけ変わるが、これは t_{i+1} を変えない。したがって、媒介変数の数列全体は π を法とした θ_0 のみによって決まる。

検算

- $t = -1$ とすると $T = 0$ となる。$(1, -2)$ における接線の傾きは -2 であり、確かに原点を通る。
- 数値的に、$t_0 = \tan 70^\circ \approx 2.747477$ からは $t_1 \approx -1.191754$、$t_2 \approx 0.176327$、$t_3 \approx 2.747477$ が得られる。同様に $\tan 50^\circ \approx 1.191754 \to -0.176327 \to -2.747477 \to 1.191754$ である。
- ランダムな t に対して三次方程式を数値的に解いてもう一つの交点を求めると、$T = (1 - t^2)/(2t)$ と一致する。

よくある間違い

- 弦（chord）の傾きを求めて等置したあと、因数 $T - t$ で約分するのを忘れる。解の和に関するヴィエト（Vieta）の公式（解と係数の関係）を使えば、この問題はまったく生じない。
- t に関する写像を小数で直接反復してしまい、正確な周期が見えなくなる。$P_3 = P_0$ を厳密に示せるのは、置換 $t = \tan\theta$ のおかげである。
- 二つ目の値として $\tan\frac{\pi}{6}$ を答える。このときは $T = t$ となり、次の点がそもそも存在しない。

STEP のその先へ

弦と接線による構成は楕円曲線（elliptic curves）の理論の核心であり、そこでは同じ「第三の交点」の規則によって三次曲線上の点全体が群（group）をなす。ここでの曲線 $y^2 = x(1+x)^2$ は特異三次曲線（singular cubic）であり（$(-1, 0)$ に孤立点（isolated point）をもつ）、置換 $t = \tan\theta$ によって、接線写像の正体が角の二倍化であることがわかる。周期が円を九等分することから現れるのはこのためである。Silverman and Tate, *Rational Points on Elliptic Curves*（楕円曲線上の有理点）は、この内容を学部レベルで見事に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。