解答例

STEP III 2003、第 3 問

純粋数学 ・ 曲線の概形

> **STEP III 2003、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q3

鍵となる考え方

$u=(1+x)^m$ と $v=(1-x)^m$ とおく。すると $\mathrm{f}=(u-v)/(u+v)$ であり、$u'v-uv'$ が共通因数 $(1-x^2)^{m-1}$ をもつので、商の微分法（quotient rule）を使うと見事に簡単になる。この導関数（derivative）は決して負にならず、それだけで $y=\mathrm{f}(x)$ の形状のほとんどがわかる。逆数の曲線については隠れた対称性がある。x を $1/x$ に置き換えると f が 1/f に変わるのである。

解答

分母は決して零にならない

ある実数 x に対して $(1+x)^m+(1-x)^m=0$ であると仮定する。

m が偶数ならば、両方の項は非負なので、どちらもゼロでなければならない。それには $x=-1$ と $x=1$ が同時に成り立つ必要があり、これは不可能である。

m が奇数ならば、$(1+x)^m=-(1-x)^m=(x-1)^m$ である。m が奇数のとき写像 $t\mapsto t^m$ は $\mathbb{R}$ 上で狭義単調増加（strictly increasing）なので単射（one-to-one）であり、$1+x=x-1$、すなわち $1=-1$ となる。これは矛盾である。

したがって、すべての実数 x に対して $(1+x)^m+(1-x)^m\neq 0$ であり、f は $\mathbb{R}$ 全体で定義され、微分可能（differentiable）である。

導関数

$u=(1+x)^m$、$v=(1-x)^m$ とすると、$u'=m(1+x)^{m-1}$、$v'=-m(1-x)^{m-1}$ である。商の微分法により、

$$\mathrm{f}'(x)=\frac{(u'-v')(u+v)-(u-v)(u'+v')}{(u+v)^2}=\frac{2(u'v-uv')}{(u+v)^2}.$$

分子は次のように簡単になる。

$$\begin{aligned}u'v-uv' &= m(1+x)^{m-1}(1-x)^m+m(1+x)^m(1-x)^{m-1}\\ &= m(1+x)^{m-1}(1-x)^{m-1}[(1-x)+(1+x)]\\ &= 2m(1-x^2)^{m-1}.\end{aligned}$$

したがって

$$\mathrm{f}'(x)=\frac{4m\,(1-x^2)^{m-1}}{[(1+x)^m+(1-x)^m]^2}.$$

$m=5$ の場合：曲線 $y=\mathrm{f}(x)$

二項定理（binomial theorem）で展開すると、分子では偶数乗の項が、分母では奇数乗の項が打ち消し合う。

$$\mathrm{f}(x)=\frac{2(5x+10x^3+x^5)}{2(1+10x^2+5x^4)}=\frac{x(x^4+10x^2+5)}{5x^4+10x^2+1},\qquad \mathrm{f}'(x)=\frac{20(1-x^2)^4}{[(1+x)^5+(1-x)^5]^2}.$$

ここから曲線の特徴を読み取る。

- **対称性。** $\mathrm{f}(-x)=-\mathrm{f}(x)$ なので、曲線は原点に関して回転対称（rotational symmetry）である。曲線は $(0,0)$ を傾き $\mathrm{f}'(0)=20/2^2=5$ で通る。
- **単調性（*monotonic*）。** すべての x に対して $\mathrm{f}'(x)\geq 0$ であり、等号が成り立つのは $x=\pm1$ のときに限る。よって f はいたるところで増加する。$x=\pm1$ では停留点（stationary point）をもつが、$(1-x^2)^4$ は符号を変えないので、これらは極値点（turning point）ではなく変曲点（point of inflection）である。それらは $(1,1)$ と $(-1,-1)$ にある。$(1-x)^5$ または $(1+x)^5$ の項が消えて、$\mathrm{f}=\pm1$ が残るからである。
- **$|x|$ が大きいとき。** $\mathrm{f}(x)\approx x/5$ である。より正確には

  $$\mathrm{f}(x)-\frac{x}{5}=\frac{x(40x^2+24)}{5(5x^4+10x^2+1)},$$

  であり、これは $|x|\to\infty$ のとき 0 に近づく。よって $y=x/5$ は斜めの漸近線（oblique asymptote）である。曲線は $x>0$ ではその上側に、$x<0$ ではその下側にある。

考えてみよう $\mathrm{f}(x)$ の大きさが 1 より大きいのはどこで、小さいのはどこか。

f は増加関数で $\mathrm{f}(\pm1) = \pm1$ なので、$|x| < 1$ では $|\mathrm{f}(x)| < 1$、$|x| > 1$ では $|\mathrm{f}(x)| > 1$ である。これは逆数を考えるときに重要になる。（$|x| < 1$ のとき、$x = \tanh t$ とおくと $(1+x)/(1-x) = \mathrm{e}^{2t}$ となり、f の分子と分母を $(1-x)^5$ で割ると $\mathrm{f}(\tanh t) = \tanh 5t$ がわかる。これは -1 と 1 の間の S 字形を見る別の方法である。）

曲線 $y = 1/\mathrm{f}(x)$

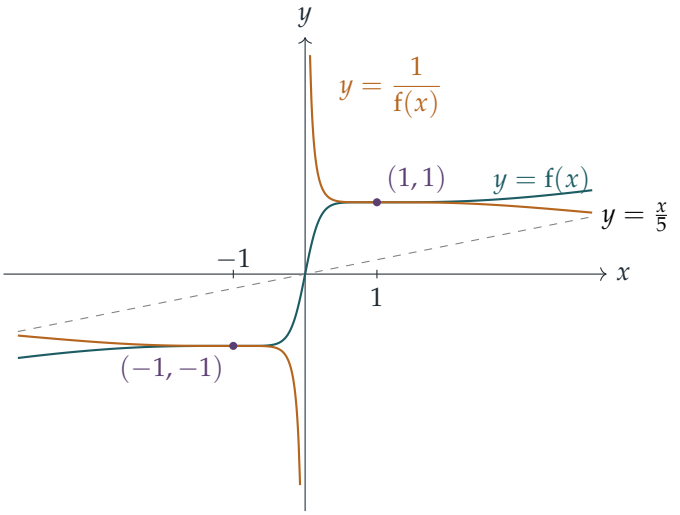
x を $1/x$ に置き換え、分子と分母に x^5 を掛けると

$$\mathrm{f}(1/x) = \frac{(x+1)^5 - (x-1)^5}{(x+1)^5 + (x-1)^5} = \frac{(1+x)^5 + (1-x)^5}{(1+x)^5 - (1-x)^5} = \frac{1}{\mathrm{f}(x)},$$

が得られる。ここで $(x-1)^5 = -(1-x)^5$ を用いた。よって $y = 1/\mathrm{f}(x)$ は曲線 $y = \mathrm{f}(1/x)$ であり、その特徴は f の特徴から導かれる。

- 奇関数（odd function）であり、f の唯一の零点である $x = 0$ では定義されない。0 の近くでは $1/\mathrm{f}(x) \approx 1/(5x)$ なので、y 軸は鉛直漸近線（vertical asymptote）であり、$x \to 0^+$ のとき $y \to +\infty$、$x \to 0^-$ のとき $y \to -\infty$ である。
- その導関数は $-\mathrm{f}'(x)/\mathrm{f}(x)^2 \leq 0$ なので、$x > 0$ と $x < 0$ のそれぞれで減少する。$(1,1)$ と $(-1,-1)$ では停留点かつ変曲点となる点をもつ。
- $|x| \to \infty$ のとき $1/\mathrm{f}(x) \approx 5/x \to 0$ なので、x 軸は漸近線である。曲線は $x > 0$ ではその上側に、$x < 0$ ではその下側にある。

2 つの曲線が交わるのは $\mathrm{f}(x)^2 = 1$ となるところ、すなわち $(1,1)$ と $(-1,-1)$ だけである。どちらの曲線もそこで水平なので、交差するのではなく接する。



検算

- $m = 1$ とすると、公式から $\mathrm{f}'(x) = 4/2^2 = 1$ となり、実際 $\mathrm{f}(x) = 2x/2 = x$ である。
- 数値的には $\mathrm{f}(1000)/1000 \approx 0.2000016$ であり、漸近線 $y = x/5$ と整合する。中心差分（central difference）による数値微分は、$m = 1, \ldots, 8$ について無作為に選んだ点で f' の公式と一致する。
- $\mathrm{f}(\tanh t) = \tanh 5t$ と $\mathrm{f}(1/x) = 1/\mathrm{f}(x)$ は、どちらも無作為に選んだ点で 10^{-9} の精度で成り立つことが確かめられる。

よくある間違い

- $x = \pm 1$ を極大点や極小点（maxima or minima）と呼んでしまう。導関数はそこでゼロに触れるが符号を変えないので、これらは停留点かつ変曲点である。
- 斜めの漸近線を見落とす。f は 5 次式を 4 次式で割ったものなので、一定値に落ち着くのではなく $x/5$ のように増大する。
- $y = 1/\mathrm{f}(x)$ が $(\pm 1, \pm 1)$ で $y = \mathrm{f}(x)$ と交差するように描いてしまう。どちらの曲線もそこで平らなので、両者は接する。

STEP のその先へ

置換 $x = \tanh t$ により、f は $\tanh t$ を用いて $\tanh 5t$ を表す公式であることがわかる。これは $\tan 5\theta$ の倍角公式（multiple-angle formula）の双曲線関数版である。このように見ると、f は 5 倍写像と共役（conjugate）な有理写像（rational map）である。このような写像と、反復（iteration）したときのその振る舞いは、複素力学系（complex dynamics）の出発点の一つである。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ビジュアル複素解析』）は、こうした有理関数が複素平面全体にどのように作用するかを見るのに素晴らしい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。