解答例

STEP III 2003、第 2 問

純粋数学 ・ 二項級数

> **STEP III 2003、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q2

鍵となる考え方

中心二項係数（central binomial coefficient）$\binom{2r}{r}$ は、負の半整数乗に対する二項級数（binomial series）の中に隠れている。最初の恒等式によって $(2r)!$ を奇数の因数と偶数の因数に分けると、$(1-p)^{-1/2}$ における p^r の係数はちょうど $\binom{2r}{r}/4^r$ であることがわかる。すると、それぞれの和は姿を変えた二項級数にほかならず、あとは p（および (ii) では適切な指数）を選ぶだけである。

解答

恒等式

$(2r)!$ の因数を奇数のものと偶数のものに分ける：

$$(2r)! = [1 \times 3 \times \cdots \times (2r-1)] \times [2 \times 4 \times \cdots \times 2r].$$

r 個の偶数の因数はそれぞれ $1, 2, \ldots, r$ のいずれかの 2 倍であるから、2 つ目の括弧は $2^r\, r!$ である。よって

$$\binom{2r}{r} = \frac{(2r)!}{r!\, r!} = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2r-1) \times 2^r\, r!}{r!\, r!} = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2r-1)}{r!} \times 2^r,$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (i)

$|p| < 1$ のとき、二項級数により

$$\begin{aligned}(1-p)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)(-p) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(-p)^2 \\ &\quad + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}(-p)^3 + \cdots \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}p + \tfrac{3}{8}p^2 + \tfrac{5}{16}p^3 + \cdots .\end{aligned}$$

である。

一般項も同じパターンに従う。p^r の係数には、因数 $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$ に由来する負号が r 個、さらに $(-p)^r$ に由来する負号が r 個あるので、これらは打ち消し合い、

$$\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{2r-1}{2}}{r!}\,p^r = \frac{1\times 3\times\cdots\times(2r-1)}{2^r\,r!}\,p^r.$$

が残る。

> **考えてみよう** これは $\binom{2r}{r}$ とどう結びつくか。

恒等式より $\dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2r-1)}{r!} = \dfrac{\binom{2r}{r}}{2^r}$ である。したがって p^r の係数は $\binom{2r}{r}/4^r$ であり、これは $r=0$ のときも両辺が 1 となるので成り立つ。ゆえに

$$(1-p)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{2r}{r}\left(\frac{p}{4}\right)^r \qquad (|p|<1).$$

求めたい和では $(p/4)^r = 1/8^r$ であるから、$p = \frac{1}{2}$ とする。これは収束区間（interval of convergence）の内部にある。すると

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\binom{2r}{r}}{8^r} = \left(1-\tfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

小問 (ii)

余分な因数 $2r+1$ は、指数をもう 1 つ進めて $(1-p)^{-3/2}$ を考えることを示唆している。$|p| < 1$ のとき、その二項級数における p^r の係数は、先ほどと同様に符号が打ち消し合って

$$\begin{aligned}\frac{\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}\times\cdots\times\frac{2r+1}{2}}{r!} &= \frac{3\times 5\times\cdots\times(2r+1)}{2^r\,r!} \\ &= (2r+1)\,\frac{1\times 3\times\cdots\times(2r-1)}{2^r\,r!} = \frac{(2r+1)\binom{2r}{r}}{4^r},\end{aligned}$$

となる。ここで $3\times5\times\cdots\times(2r+1)=(2r+1)\times[1\times3\times\cdots\times(2r-1)]$ を用い、そのうえで (i) とまったく同様に恒等式を用いた。($r=0$ のときは両端とも 1 に等しい。) よって

$$(1-p)^{-\frac{3}{2}}=\sum_{r=0}^{\infty}(2r+1)\binom{2r}{r}\left(\frac{p}{4}\right)^r \qquad (|p|<1).$$

今度は $p/4=\frac{1}{5}$、すなわち $p=\frac{4}{5}$ とすればよく、これもまた $|p|<1$ を満たす。ゆえに

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2r+1)\binom{2r}{r}}{5^r}=\left(1-\tfrac{4}{5}\right)^{-\frac{3}{2}}=\left(\tfrac{1}{5}\right)^{-\frac{3}{2}}=5^{\frac{3}{2}}=(\sqrt{5})^3,$$

となり、示すべき式が得られた。

別解として、$|x|<\frac{1}{4}$ に対して $f(x)=\sum\binom{2r}{r}x^r=(1-4x)^{-1/2}$ とおく。べき級数 (power series) をその収束区間の内部で項別微分 (term-by-term differentiation) すると、$\sum r\binom{2r}{r}x^r=xf'(x)=2x(1-4x)^{-3/2}$ であるから、

$$\sum(2r+1)\binom{2r}{r}x^r=4x(1-4x)^{-\frac{3}{2}}+(1-4x)^{-\frac{1}{2}}=(1-4x)^{-\frac{3}{2}},$$

となり、$x=\frac{1}{5}$ とすれば同じ答えが得られる。

検算

- (i) の最初の数項は $1+\frac{2}{8}+\frac{6}{64}+\frac{20}{512}\approx1.371$ であり、すでに $\sqrt{2}\approx1.414$ に近い。200 項まで加えると 1.41421356… となる。
- (ii) の級数はより緩やかに収束する (項の比は $\frac{4}{5}$ に近づく) が、400 項まで加えると 11.18033988… となり、$5\sqrt{5}\approx11.1803$ と一致する。
- $r=0,1,2,3$ に対する係数 $\binom{2r}{r}/4^r$ は $1,\frac{1}{2},\frac{3}{8},\frac{5}{16}$ であり、直接求めた 4 つの項と一致する。

よくある間違い

- 符号を見失うこと。係数に含まれる r 個の負の因数と、$(-p)^r$ に由来する $(-1)^r$ は必ず打ち消し合うので、係数はすべて正である。
- 選んだ p が $|p|<1$ を満たすことの確認を忘れること。これが成り立たなければ、級数がその関数に収束するとは限らない。
- (ii) で、p を変えて再び $(1-p)^{-1/2}$ を用いること。因数 $2r+1$ はその級数だけからは出てこない。

STEP のその先へ

関数 $\sum \binom{2r}{r} x^r = (1-4x)^{-1/2}$ は中心二項係数の母関数（generating function）であり、組合せ論（combinatorics）における標準的な道具である。たとえば、これを 2 乗すると $\sum_r 4^r x^r$ が得られ、これにより $\sum_k \binom{2k}{k}\binom{2r-2k}{r-k} = 4^r$ が証明される。項別微分の正当化や、べき級数がどこで収束するかを正確に知ることは、大学 1 年次の解析学（analysis）の話題である。べき級数については Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を、級数に関する STEP の演習をさらに積みたければ Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。