解答例

STEP III 2003、第 14 問

確率・統計 ・ 確率母関数

STEP III 2003、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/03-s3-q14

鍵となる考え方

独立（independent）な得点の和の確率母関数（probability generating function, pgf）は、それぞれの確率母関数の積である。したがって、**どのようなサイコロが同じ合計の分布を与えるか**という問題は、**多項式を二つの因数にどう分けられるか**という問題に帰着する。すべてを既約（irreducible）な因数に因数分解（factorise）し、それらの因数を二つのサイコロに振り分けることで、可能な目の付け替えを読み取ることができる。

解答

最初の部分

X を通常の公平なサイコロの出る目とする。$1,\dots,6$ のそれぞれの確率は $\frac{1}{6}$ であるから、

$$G_X(t) = \mathrm{E}(t^X) = \tfrac{1}{6}(t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6) = \tfrac{1}{6}\,t\,(1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5).$$

括弧内を因数分解するには、項を二つずつ組にし、さらに 3 乗の差を用いる。

$$1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 = (1 + t) + t^2(1 + t) + t^4(1 + t) = (1 + t)(1 + t^2 + t^4),$$
$$1 + t^2 + t^4 = (1 + t^2)^2 - t^2 = (1 + t + t^2)(1 - t + t^2).$$

よって

$$G_X(t) = \tfrac{1}{6}\,t\,(1 + t)(1 - t + t^2)(1 + t + t^2).$$

X_1 と X_2 を独立に振った二つのサイコロの出る目とすると、t^{X_1} と t^{X_2} は独立であるから $\mathrm{E}(t^{X_1+X_2}) = \mathrm{E}(t^{X_1})\mathrm{E}(t^{X_2})$ であり、

$$G_{X_1+X_2}(t) = G_X(t)^2 = \frac{1}{36}\,t^2(1+t)^2(1-t+t^2)^2(1+t+t^2)^2,$$

となる。これが求める形である。

第 2 の部分

Y と Z を、それぞれ目が $1,2,2,3,3,4$ と $1,3,4,5,6,8$ であるサイコロの出る目とする。各面を数えると

$$G_Y(t) = \tfrac{1}{6}(t+2t^2+2t^3+t^4),$$
$$G_Z(t) = \tfrac{1}{6}(t+t^3+t^4+t^5+t^6+t^8).$$

Y について：$1+2t+2t^2+t^3 = (1+t)(1+t+t^2)$ であり、これは展開すれば確かめられる。よって

$$G_Y(t) = \tfrac{1}{6}\,t\,(1+t)(1+t+t^2).$$

Z については、最初の部分から得られる積 $(1+t)(1-t+t^2) = 1+t^3$ と $(1+t+t^2)(1-t+t^2) = 1+t^2+t^4$ が役に立つ。すると

$$(1+t^3)(1+t^2+t^4) = 1+t^2+t^3+t^4+t^5+t^7,$$

であり、これに t を掛けるとちょうど $t+t^3+t^4+t^5+t^6+t^8$ になる。したがって

$$G_Z(t) = \tfrac{1}{6}\,t\,(1+t)(1+t+t^2)(1-t+t^2)^2.$$

独立に振るので、

$$G_{Y+Z}(t) = G_Y(t)G_Z(t) = \frac{1}{36}\,t^2(1+t)^2(1-t+t^2)^2(1+t+t^2)^2 = G_{X_1+X_2}(t).$$

多項式として等しい二つの確率母関数は係数も等しく、t^n の係数は合計が n となる確率である。よって、これらのサイコロでも通常のサイコロ二つの場合でも、どの合計も同じ確率で現れる。

最後の部分

通常の 4 面サイコロの確率母関数は

$$\tfrac{1}{4}(t+t^2+t^3+t^4) = \tfrac{1}{4}\,t\,(1+t)(1+t^2),$$

であるから、その二つの合計に対する目標の確率母関数は

$$\frac{1}{16}\,t^2(1+t)^2(1+t^2)^2.$$

である。新しい二つのサイコロの確率母関数を $\frac{1}{4}f(t)$、$\frac{1}{4}g(t)$ とする。f における t^n の係数は目が n である面の個数であるから、f と g は係数が非負整数の多項式で、$f(1)=g(1)=4$ を満たす。また、どの目も正の整数であるから $f(0)=g(0)=0$ である。求めるべきは

$$f(t)\,g(t)=t^2(1+t)^2(1+t^2)^2.$$

である。

考えてみよう なぜ f は同じ因数 t、$1+t$、$1+t^2$ のみから構成されなければならないのか？

因数 t と $1+t$ は1次式であり、$1+t^2$ は実数解をもたないので、三つとも実数上で既約である。多項式は（定数倍を除いて）既約因数への分解が一意的であるから、右辺の任意の因数は

$$f(t)=c\,t^k(1+t)^a(1+t^2)^b,\qquad g(t)=\tfrac{1}{c}\,t^{2-k}(1+t)^{2-a}(1+t^2)^{2-b},$$

の形である。ただし $0\le k,a,b\le 2$、定数 $c>0$ である。

ここで f と g に関する条件を一つずつ用いる。

- **定数 c。** f の最低次の係数は c であり、g のそれは $1/c$ である。どちらも面の個数なので正の整数であり、これより $c=1$ が強制される。
- **t の指数。** $f(0)=0$ より $k\ge 1$、$g(0)=0$ より $2-k\ge 1$ が必要である。よって $k=1$ であり、各サイコロはちょうど一つの因数 t をもつ。
- **4 つの面。** $f(1)=2^a\cdot 2^b=4$ より $a+b=2$ となり、このとき $g(1)=2^{2-a}2^{2-b}=4$ は自動的に成り立つ。

したがって (a,b) は $(2,0)$、$(1,1)$、$(0,2)$ のいずれかであり、g はその残りを取る。二つのサイコロを入れ替えても同じ組になるので、場合は二つである。

- 両方とも $(a,b)=(1,1)$ の場合：$f=g=t(1+t)(1+t^2)=t+t^2+t^3+t^4$ であり、通常の組 $1,2,3,4$ と $1,2,3,4$ である。
- $(a,b)=(2,0)$ と $(0,2)$ の場合：

  $$f(t)=t(1+t)^2=t+2t^2+t^3,\qquad g(t)=t(1+t^2)^2=t+2t^3+t^5,$$

  これは目が $1,2,2,3$ と $1,3,3,5$ のサイコロである。

どちらの場合も、二つの多項式は係数が非負整数でその和が 4 であるから、確かにサイコロを表しており、作り方から正しい確率母関数を与える。

よって、目の付け方は通常の組と、組 $\{1,2,2,3\}$、$\{1,3,3,5\}$ のみである。

検算

通常でない 4 面サイコロの組について合計を列挙すると、同様に確からしい 16 通りの和は $2,4,4,6,\ 3,5,5,7,\ 3,5,5,7,\ 4,6,6,8$ であり、合計 $2,\ldots,8$ の度数は $1,2,3,4,3,2,1$ となって、通常のサイコロ二つの場合とまったく同じである。上のどの確率母関数でも $t=1$ を代入すると 1 になり、各因数分解の手早い確認になる。目が 1 から 7 までの 4 面サイコロのすべての組をコンピュータで探索すると、ちょうど上の二つの組が見つかる。また、$1,2,2,3,3,4$ と $1,3,4,5,6,8$ のサイコロの合計は通常の分布と完全に一致する（たとえば、どちらの場合も $\mathrm{P}(\text{合計}=7)=\frac{6}{36}$ である）。

よくある間違い

- 定数 c を忘れること：一方のサイコロが因数 2 を、もう一方が因数 $\frac{1}{2}$ をもつことができない理由が必要である。両方のサイコロで最低次の係数が正の整数であることが、その理由である。
- $k=0$ や $k=2$ を許してしまうこと。その場合、一方のサイコロに目が 0 の面ができてしまい、これは正の整数ではない。
- $(1-t+t^2)$ を複素数の 1 次因数に分解したままにすること。実数上ではこれは既約であり、因数を振り分けるにはその形が必要である。

STEP のその先へ

ここで現れた 6 面サイコロの組は**シッカーマンのサイコロ**（*Sicherman dice*）であり、同じ方法によって、これが正の目をもつ通常でない 6 面サイコロの唯一の組であることが示される。この議論は多項式の一意分解（unique factorisation）に基づいており、これは環と体（rings and fields）の最初の講義で、算術の基本定理（fundamental theorem of arithmetic）の多項式版として学ぶことになる。また、母関数は多くの難しい数え上げの問題を代数の問題に変える。両方の考え方については、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）、および Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。