解答例

STEP III 2003、第 13 問

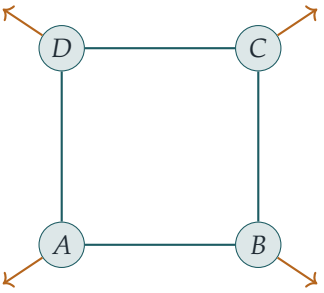
確率・統計 ・ 吸収マルコフ連鎖

> **STEP III 2003、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q13

鍵となる考え方

これは「第一歩解析（first-step analysis）」である。ウサギが次に何をするかで条件付けると、ある部屋から出発したときの確率が、そこから移動できる部屋から出発したときの確率で表される。こうして 4 つの連立一次方程式が得られ、正方形の対称性（対角線 AC に関する鏡映で B と D が入れ替わる）によって計算量が減る。最後の小問では、C に入ることを失敗とみなすように変更した巣穴に同じ手法を適用し、そのうえで条件付き確率（conditional probability）の定義を用いる。

解答



地上へのトンネル

以下では一貫して、各移動はウサギの過去とは独立に、それぞれ確率 $\frac{1}{3}$ で選ばれるものとする（ウサギがどの部屋に「いることになって」も、各移動が「同様に確からしい」という問題文をこのように解釈する）。ウサギが最終的に A のトンネルから出る事象を E_A と書く。

小問 (i)

ウサギが A にいるとし、次の移動で条件付ける。

- 確率 $\frac{1}{3}$ でただちに A のトンネルを上り、E_A が起こる。
- 確率 $\frac{1}{3}$ で B へ走る。このときウサギは B にいて、今後の移動はそこへどのように来たかに依存しないので、最終的に A から出る確率は p_B である。
- 確率 $\frac{1}{3}$ で D へ走り、同様にその後の確率は p_D である。

全確率の法則（law of total probability）により、

$$p_A = \tfrac{1}{3}\cdot 1 + \tfrac{1}{3}p_B + \tfrac{1}{3}p_D,$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

他の部屋から同じ議論をすると、さらに 3 つの方程式が得られる。唯一の違いは、B、C、D のトンネルから出ると E_A は**起こらなかった**ことになるので、その分岐の寄与は $\frac{1}{3}\cdot 0$ となる点である：

$$\begin{aligned} p_B &= \tfrac{1}{3}p_A + \tfrac{1}{3}p_C, \\ p_C &= \tfrac{1}{3}p_B + \tfrac{1}{3}p_D, \\ p_D &= \tfrac{1}{3}p_A + \tfrac{1}{3}p_C. \end{aligned}$$

p_B と p_D の方程式は右辺が等しいので、$p_B = p_D$ である。この共通の値を b とおく（これは AC に関する鏡映対称性である）。すると

$$p_A = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}b, \qquad p_C = \tfrac{2}{3}b,$$

であり、これを p_B の方程式に代入すると、

$$b = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}b + \tfrac{2}{3}b\right) = \tfrac{1}{9} + \tfrac{4}{9}b \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{5}{9}b = \tfrac{1}{9} \quad\Longrightarrow\quad b = \tfrac{1}{5}.$$

したがって

$$p_A = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{15} = \frac{7}{15}, \qquad \text{また} \qquad p_B = p_D = \tfrac{1}{5},\ p_C = \tfrac{2}{15}.$$

? **考えてみよう** そもそもウサギが外に出ることはどうしてわかるのか。それがわからなければ、これらの方程式が本当に確率を決定するとはいえないのではないか。

各ステップでウサギは確率 $\frac{1}{3}$ で外に出るので、n ステップ後にまだ地下にいる確率は $(\frac{2}{3})^n \to 0$ である。すなわち、ウサギは確率 1 で外に出る。また、4 つの連立一次方程式の解はただ 1 つである（選択の余地なく解けた）ので、上で求めた値がまさに求める確率である。

小問 (iii)

ウサギが一度も C を訪れない事象を N とする。求めるものは

$$\mathrm{P}(N \mid E_A) = \frac{\mathrm{P}(N \cap E_A)}{\mathrm{P}(E_A)},$$

であり、ウサギは A から出発するので、分母は $p_A = \frac{7}{15}$ である。

分子については、ウサギが現在それぞれ A、B、D にいる（そしてまだ C を訪れていない）とき、**一度も C に入らずに** A のトンネルから出る確率を q_A、q_B、q_D とする。第一歩解析は前とまったく同様に機能するが、今度は C への移動を失敗とみなす：

$$\begin{aligned} q_A &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}q_B + \tfrac{1}{3}q_D, \\ q_B &= \tfrac{1}{3}q_A + \tfrac{1}{3}\cdot 0 + \tfrac{1}{3}\cdot 0, \end{aligned}$$

なぜなら、B からウサギは A へ走って戻るか、C へ走り込む（失敗）か、違うトンネルから出る（失敗）かのいずれかだからである。対称性より $q_D = q_B = \frac{1}{3}q_A$ なので、

$$q_A = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{9}q_A \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{7}{9}q_A = \tfrac{1}{3} \quad\Longrightarrow\quad q_A = \tfrac{3}{7}.$$

したがって

$$\mathrm{P}(N \mid E_A) = \frac{3/7}{7/15} = \frac{45}{49}.$$

検算

- 4 つの値 p_A, p_B, p_C, p_D は、各部屋から出発して A から出る確率である。対称性より、これらは A から出発してそれぞれ A、B、C、D から出る確率でもあるので、和は 1 でなければならない。実際、$\frac{7}{15} + \frac{3}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15} = 1$ である。
- $p_A > p_B = p_D > p_C$ となっており、これは当然である。ウサギが A から遠い所から出発するほど、A から出る可能性は低くなる。
- (iii) の答えは 1 に近い。A から出るウサギは、たいていごく短い道のりの後にそうしたのである。4×10^5 匹のウサギのシミュレーションでは、p_A について 0.469、条件付き確率について 0.918 が得られ、$\frac{7}{15} \approx 0.467$ および $\frac{45}{49} \approx 0.918$ と一致した。

よくある間違い

- p_B、p_C、p_D の方程式に「今すぐ出る」の項 $\frac{1}{3}$ を含めてしまう。A 以外のトンネルから出る場合の寄与は 0 である。
- (iii) の答えとして $q_A = \frac{3}{7}$ を答えてしまう。これは $\mathrm{P}(N \cap E_A)$ であり、問題が求めているのは条件付き確率なので、さらに p_A で割る必要がある。

STEP のその先へ

ウサギの動きは**マルコフ連鎖**（Markov chain）である。すなわち、次の移動は現在いる場所のみに依存する。地上は**吸収状態**（absorbing state）であり、p_A, p_B, p_C, p_D は**吸収確率**（absorption probabilities）である。第一歩解析によって、吸収確率は常に連立一次方程式に帰着される。同じ考え方で、吸収までの期待時間や破産問題（gambler's ruin）の確率など、多くのものが求められる。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、マルコフ連鎖を初めて学ぶのによい解説を含んでいる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。