解答例

STEP III 2003、第 11 問

力学 ・ 迎撃の運動学

STEP III 2003、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/03-s3-q11

鍵となる考え方

運動のことはいったん忘れて、衝突が起こるはずのただ一点について考える。その瞬間、A、B と衝突点は三角形をなし、その 3 辺は d、P が進んだ距離、Q が進んだ距離であり、B における角は方位によって定まる。すると余弦定理（cosine rule）から方程式が 1 つ得られ、進んだ距離をどちらも時刻を用いて表すと、それは二次方程式（quadratic equation）になる。こうして、衝突が可能かどうかは、その二次方程式が正の解をもつかどうかという問題に帰着する。

解答

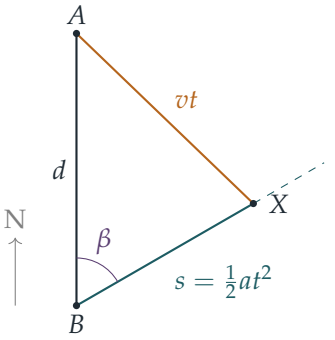
P と Q を、水平面内を運動する質点（particle）としてモデル化する。方位（bearing）は北から時計回りに測り、$v > 0$ とする。

衝突の方程式

時刻 $t > 0$ に、点 X で Q が P に衝突したとする。それまでに P は静止状態から出発し、一定の直線に沿って一定の加速度 a で動いているから、

$$BX = s = \tfrac{1}{2}at^2,$$

であり、Q は一定の速さで直線上を動いているから $AX = vt$ である。



B から A への向きは真北であり、B から X への向きは方位 β であるから、角 ABX は β である（$\beta > 180^\circ$ のときは $360^\circ - \beta$ となるが、余弦の値は同じである）。三角形 ABX に余弦定理を用いると

$$v^2t^2 = d^2 + s^2 - 2ds\cos\beta.$$

を得る。（$\beta = 0$ または 180° のときは「三角形」はつぶれてしまうが、この方程式はやはり成り立ち、$(vt)^2 = (d \mp s)^2$ となる。）$t^2 = 2s/a$ であるから左辺は $2v^2s/a$ であり、整理すると

$$s^2 - 2\left(d\cos\beta + \frac{v^2}{a}\right)s + d^2 = 0. \qquad (*)$$

逆に、$(*)$ が解 $s > 0$ をもつとき、$t = \sqrt{2s/a}$ とおき、その時刻における P の位置を X とする。このとき $(*)$ はまさに $AX = vt$ であることを述べており、また $AX > 0$ である。よって Q を A から X に向けて発射すれば、それは時刻 t に X に到達し、P も同時にそこへ到達するので、衝突する。したがって

$$\text{適切な向きが存在する} \iff (*) \text{ が次の正の解をもつ：} s.$$

必要条件

$k = d\cos\beta + v^2/a$ とおくと、$(*)$ は $s^2 - 2ks + d^2 = 0$ となる。

考えてみよう この二次方程式が実数解をもつことは確かに必要だが、それで十分だろうか。解について、ほかに何を知っておく必要があるだろうか。

s は進んだ距離であるから、解は正でなければならない。解の積は $d^2 > 0$ であるから 2 つの解は同符号であり、その和は $2k$ である。よって、正の解が存在するのは、判別式（discriminant）が 0 以上であり、かつ $k > 0$ であるときに限る：

$$k^2 \geq d^2 \quad \text{かつ} \quad k > 0 \iff k \geq d.$$

（$k > 0$ ならば、$d > 0$ より $k^2 \geq d^2$ は $k \geq d$ と同値である。また $k \geq d$ ならば必然的に $k > 0$ である。）

よって、Q が P に衝突できるならば

$$d\cos\beta + \frac{v^2}{a} \geq d, \qquad \text{すなわち} \qquad v^2 \geq ad(1-\cos\beta),$$

となり、これが求める結果である。

P が距離 d だけ動く前に衝突させる

次に $v^2 > ad(1-\cos\beta)$ とすると、$k > d > 0$ である。このとき判別式 $4(k^2-d^2)$ は正であり、$(*)$ は異なる 2 つの解 $s_1 < s_2$ をもつ。解の和 $2k$ と積 d^2 がともに正であるから、両方とも正である。これらは異なり、かつ

$$s_1 s_2 = d^2,$$

を満たすから、両方が d 以上になることも、両方が d 以下になることもない。よって

$$s_1 < d < s_2.$$

である。具体的には $s_1 = k - \sqrt{k^2-d^2}$ である。

上で示した逆の議論により、P の経路上で B から距離 s_1 の点 X_1 に向けて Q を発射すれば、Q は時刻 $t_1 = \sqrt{2s_1/a}$ に P に衝突し、その瞬間に P は $s_1 < d$ しか動いていない。よって、P が距離 d だけ動く前に Q が P に衝突するように狙いを定めることができ、これが示すべきことであった。

検算

- $\beta = 0$ とする：P は A に向かってまっすぐ進むので、v の値によらず両者は必ず出会う。条件は $v^2 \geq 0$ となり、これは常に成り立つ。このとき $(*)$ は $s^2 - 2(d+v^2/a)s + d^2 = 0$ となり、小さいほうの解は d より小さい。すなわち、常識が示すとおり、P が A に到達する前に両者は出会う。
- $a = d = 1$、$\beta = 90°$（つまり P は真東に進む）、$v^2 = 2 > 1 = ad(1-\cos\beta)$ とする。このとき $(*)$ は $s^2 - 4s + 1 = 0$ となるから、$s_1 = 2 - \sqrt{3} \approx 0.268 < 1$ である。$t_1 = \sqrt{2s_1}$ において $s_1^2 + 1 = 2t_1^2$ が成り立つので、衝突点は確かに A から距離 vt_1 のところにある。a、d、β、v の多数のランダムな値で数値的に確かめたところ、$s_1 < d$ での衝突が確認でき、また $v^2 < ad(1-\cos\beta)$ のときは P が常に A から vt より遠くにあることも確認できた。
- 境界の場合 $v^2 = ad(1-\cos\beta)$ では $k = d$ となり、重解 $s = d$ を得る。すなわち、衝突が起こりうるのは P がちょうど d だけ進んだときに限られる。最後の部分で狭義の不等式が必要なのはこのためである。

よくある間違い

- 判別式が 0 以上であることだけを要求すること。それでは $|k| \geq d$ となり、$k \leq -d$ も許してしまう。このとき 2 つの解はともに負であり、衝突は起こらない。
- 余弦定理で誤った角を用いること。B における角は BA（真北）と BX（方位 β）のなす角であるから、$180^\circ - \beta$ ではなく β そのものである。
- 最後の部分で必要条件だけを証明すること。X_1 に向けて狙えば実際に衝突することも示さなければならず、それが逆の議論である。

STEP のその先へ

これは追跡・迎撃問題（pursuit-and-interception problem）である。ここでは標的の経路があらかじめわかっており、迎撃する側は直線上を動くので、問題は出会う時刻に関する 1 つの方程式に帰着する。ミサイルの誘導や、追う側が常に標的のほうへ向きを変え続ける「追跡曲線」（pursuit curve）では、代わりに微分方程式（differential equation）が現れる。まず出会う点を固定し、誰がそこに間に合うように到達できるかを問うという習慣は、大学 1 年の力学における標準的な道具である。Kleppner and Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、相対運動の運動学を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。