解答例

STEP III 2003、第 10 問

力学 ・ 変化する加速度

> **STEP III 2003、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q10

鍵となる考え方

加速度（acceleration）$kx\dot{x}$ は時間についての完全な導関数（exact derivative）になっている。実際、それは $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}kx^2)$ である。したがって、ただちに一度積分して一階の微分方程式（first-order equation）$\dot{x} = \frac{1}{2}kx^2 + C$ が得られ、これは変数分離（separation of variables）によって解ける。すべてを決めるのは定数 C の符号である。定数が正ならば逆正接関数（arctangent）が現れ（解は発散する）、負ならば部分分数分解（partial fractions）と対数が現れる（解はある値に落ち着く）。

解答

粒子は x 軸上を $\ddot{x} = kx\dot{x}$ に従って運動するものとして扱う。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2) = 2x\dot{x}$ であるから、運動方程式（equation of motion）は

$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}kx^2\right), \qquad \text{よって} \qquad \dot{x} = \tfrac{1}{2}kx^2 + C$$

となる。ここで定数を C とした。$t = 0$ において $x = d$、$\dot{x} = U$ であるから $C = U - \frac{1}{2}kd^2$ であり、

$$\dot{x} = \tfrac{1}{2}k(x^2 - d^2) + U. \qquad (*)$$

小問 (i)

$U = kd^2$ のとき、式 $(*)$ は

$$\dot{x} = \tfrac{1}{2}k(x^2 + d^2).$$

となる。右辺はつねに正であるから、変数を分離してよい：

$$\int_d^x \frac{\mathrm{d}u}{u^2+d^2} = \int_0^t \tfrac{1}{2}k\,\mathrm{d}s \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{d}\Big[\arctan\frac{x}{d} - \arctan 1\Big] = \tfrac{1}{2}kt.$$

$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ であるから $\arctan(x/d) = \frac{1}{2}dkt + \frac{\pi}{4}$ となり、よって

$$x = d\tan\Big(\frac{dkt}{2} + \frac{\pi}{4}\Big).$$

これは tan の引数が $\frac{\pi}{2}$ より小さい間は成り立つ（逆正接関数の値域は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ である）。t が 0 から増加すると、引数は $\frac{\pi}{4}$ から増加し、

$$\frac{dkt}{2} = \frac{\pi}{4}, \qquad \text{すなわち} \qquad t = \frac{\pi}{2dk}.$$

のときに $\frac{\pi}{2}$ に達する。$\theta \to \frac{\pi}{2}$（下から近づく）のとき $\tan\theta \to +\infty$ であり、かつ $d > 0$ であるから、$t \to \frac{\pi}{2dk}$ のとき $x \to \infty$ となり、題意が示された。粒子は有限の時間で無限遠に到達する。

小問 (ii)

今度は $U < 0$ であるから $C = U - \frac{1}{2}kd^2 < 0$ である。$a > 0$ として $C = -\frac{1}{2}ka^2$ とおく。すなわち

$$a = \sqrt{d^2 - \frac{2U}{k}}, \qquad \text{とおくと} \qquad \dot{x} = \tfrac{1}{2}k(x^2 - a^2).$$

$U < 0$ かつ $k > 0$ であるから、$a > d > 0$ が成り立つ。

> **考えてみよう** 部分分数分解から出てくる対数として、$\ln\frac{x-a}{x+a}$ と $\ln\frac{a-x}{a+x}$ のどちらを使うべきだろうか。

それは x がどの範囲にあるかによる。定数解（constant solution）$x = \pm a$ は $\dot{x} = 0$ となるところである。初期値 $x = d$ は $-a$ と a の真に間にあり、そこから出発した解は定数解 $x = \pm a$ を横切ることができない（このような一階方程式の二つの解が交わることはない）。したがって、すべての時刻で $-a < x < a$ である。この範囲では $\dot{x} < 0$ であるから x は減少し、量 $a - x$ と $a + x$ はともに正である。

$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\Big(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\Big)$ を用いて変数を分離すると、

$$\frac{1}{2a}\Big[\ln\frac{a-u}{a+u}\Big]_d^x = \tfrac{1}{2}kt \quad\Longrightarrow\quad \frac{a-x}{a+x} = A\,\mathrm{e}^{akt}, \qquad \text{ただし} A = \frac{a-d}{a+d}.$$

$a > d > 0$ であるから $0 < A < 1$ であることに注意する。x について解くと、

$$x = a\,\frac{1 - A\mathrm{e}^{akt}}{1 + A\mathrm{e}^{akt}}, \qquad a = \sqrt{d^2 - \frac{2U}{k}}, \quad A = \frac{a-d}{a+d}.$$

これはすべての $t \geq 0$ に対して定義される（分母は正である）。同値な形として、$\ln A = -2\,\mathrm{artanh}(d/a)$ であるから、$x = a\tanh(\mathrm{artanh}(d/a) - \frac{1}{2}akt)$ と書くこともできる。

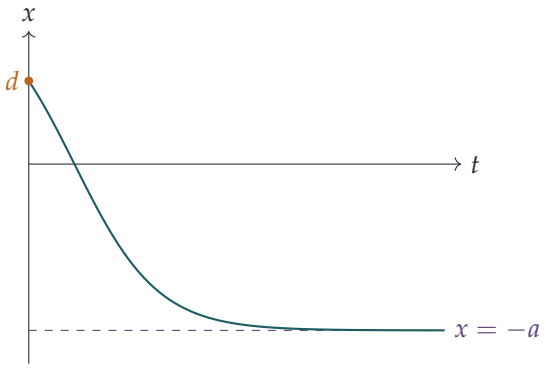
$t \to \infty$ のとき、$A > 0$ かつ $ak > 0$ であるから $Ae^{akt} \to \infty$ である。分母と分子を Ae^{akt} で割ると、

$$x = a\,\frac{A^{-1}e^{-akt} - 1}{A^{-1}e^{-akt} + 1} \longrightarrow -a.$$

よって x は極限

$$-a = -\sqrt{d^2 - \frac{2U}{k}}\,.$$

に収束（converge）する。（この極限には k も含まれる。d と U を固定して k を変えると極限も変わるので、d と U だけで表すことはできない。）



このグラフ（$d = 1$、$a = 2$、$k = 1$ の場合を描いたもの）は、粒子が負の速度で d から出発し、原点を通過して、しだいにゆっくりと $-a$ に近づいていく様子を示している。

検算

- 小問 (i) では、$t = 0$ とすると $x = d\tan\frac{\pi}{4} = d$ となり、微分すると $\dot{x} = \frac{1}{2}kd^2\sec^2\frac{\pi}{4} = kd^2 = U$ となる。
- 小問 (ii) では、$t = 0$ とすると $x = a\frac{1-A}{1+A} = d$ となる。$U \to 0^-$ のとき $a \to d$ かつ $A \to 0$ となるので、x は d にとどまる。これは正しい。$x = d$、$\dot{x} = 0$ のとき加速度は 0 になるからである。
- 数値的にも、ランダムな k、d、U に対して $\ddot{x} = kx\dot{x}$ をルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で解いたところ、二つの公式とは 10^{-6} よりよい精度で一致した。たとえば $k = 1$、$d = 1$、$U = -1.5$ のとき $a = 2$ であり、数値計算による x は -2.000000 に落ち着く。

よくある間違い

- 絶対値をつけずに $\ln \frac{x-a}{x+a}$ を使ってしまう。$|x| < a$ のとき、これは負の数の対数になってしまう。
- 極限として正の平方根をとってしまう。x は d から減少するので、極限は $+a$ ではなく $-a$ である。
- 加速度を $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ と書いて $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = kxv$ を得たあと、$v \neq 0$ に言及せずに v で割ってしまう。ここではそれでもうまくいくが、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ を直接積分すればこの問題を避けられる。

STEP のその先へ

小問 (i) は**有限時間爆発**（finite-time blow-up）の小さな例である。f が線形より速く（ここでは 2 次で）増大する方程式 $\dot{x} = f(x)$ は、解を有限時間で無限大に飛ばしてしまうことがあり、したがって解がすべての t に対して存在するとは限らない。小問 (ii) はもう一つの振る舞いを示している。定数解 $x = \pm a$ は平衡点（equilibrium）であり、$-a$ は安定（stable）、$+a$ は不安定（unstable）である。そして相直線（phase line）の図を描けば、積分をする前に極限を予測できる。これら二つの考え方は、解が交わらないことを保証する一意性定理（uniqueness theorem）とともに、Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）で扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。