解答例

STEP III 2003、第 1 問

純粋数学 ・ 逆双曲線関数による積分

STEP III 2003、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/03-s3-q1

鍵となる考え方

最初の二つの結果は、連鎖律（chain rule）を丁寧に用いる計算である。そこから得られる有用なものは一つの「型」である。すなわち、各逆関数（inverse function）の導関数は $\dfrac{\text{定数}}{(\text{一次式})\sqrt{\text{一次式}}}$ という形をしており、これはまさに二つの被積分関数（integrand）の形そのものである。そこで各積分について、この型に合うように a と b を選ぶ。どちらの公式を使うかは、根号の外にある括弧が教えてくれる。それが大きいほうの定数をもつ $x+b$ ならば arcsin を、小さいほうの定数をもつ $x+a$ ならば arcosh を用いる。

解答

二つの導関数

$y = \dfrac{x+a}{x+b}$ とおく。商の微分法（quotient rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{(x+b)-(x+a)}{(x+b)^2} = \frac{b-a}{(x+b)^2}.$$

$x+a>0$ かつ $x+b>0$ であるから $y>0$ であり、また $b>a$ より分子は分母より小さいので $0<y<1$ となり、そこで $\arcsin y$ は微分可能（differentiable）である。次に、平方の差の公式（difference of two squares）を用いると

$$1-y^2 = \frac{(x+b)^2-(x+a)^2}{(x+b)^2} = \frac{(b-a)(2x+a+b)}{(x+b)^2},$$

となる。$x+b>0$ であるから $(x+b)^2$ の平方根は $x+b$ そのものであり、したがって

$$\sqrt{1-y^2} = \frac{\sqrt{b-a}\,\sqrt{a+b+2x}}{x+b}.$$

連鎖律により、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin\left(\frac{x+a}{x+b}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x+b}{\sqrt{b-a}\,\sqrt{a+b+2x}}\cdot\frac{b-a}{(x+b)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{b-a}}{(x+b)\sqrt{a+b+2x}},$$

となる。ここで $(b-a)/\sqrt{b-a} = \sqrt{b-a}$ を用いた。これが求める結果である。

arcosh については、$z = \dfrac{x+b}{x+a}$ とおく。$x+b > x+a > 0$ であるから、ここでは $z > 1$ である。すると

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{(x+a)-(x+b)}{(x+a)^2} = -\frac{b-a}{(x+a)^2}, \qquad z^2-1 = \frac{(b-a)(2x+a+b)}{(x+a)^2}.$$

$x+a > 0$ であるから $\sqrt{z^2-1} = \sqrt{b-a}\,\sqrt{a+b+2x}\,/(x+a)$ であり、したがって

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcosh}\left(\frac{x+b}{x+a}\right) = \frac{x+a}{\sqrt{b-a}\,\sqrt{a+b+2x}}\cdot\left(-\frac{b-a}{(x+a)^2}\right) = -\frac{\sqrt{b-a}}{(x+a)\sqrt{a+b+2x}}.$$

二つの結果はほとんど同じに見える。違いは符号と、どちらの括弧が根号の外にあるかである。

考えてみよう arcsin の計算で実際に使った仮定（hypotheses）はどれか？

$\sqrt{(x+b)^2}$ を簡単にするために $x+b > 0$ が必要であり、また $1-y^2 > 0$ が必要であった。因数分解した形から、$b > a$ のもとで $1-y^2 > 0$ が成り立つのはちょうど $a+b+2x > 0$ のときである。$x+a > 0$ そのものは一度も使っていない。したがって arcsin の公式は、$x+a$ が負であっても、$x+b > 0$ かつ $a+b+2x > 0$ であれば成り立つ。その場合 y は $(-1, 0]$ にある。このことが (ii) で重要になる。

小問 (i)

根号の外にある括弧は $x+1$ であるから、これを arcosh の公式の $x+a$ に合わせることを試みる。$\sqrt{x+3} = \sqrt{2x+6}\,/\sqrt{2}$ と書くと、$a = 1$ に加えて $a+b = 6$ が必要となる。これより $b = 5$ であり、$b-a = 4$ である。これらの値のもとで、仮定 $x+a > 0$、$x+b > 0$、$b > a$ はすべて $x > -1$ で成り立ち、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcosh}\left(\frac{x+5}{x+1}\right) = -\frac{2}{(x+1)\sqrt{2x+6}} = -\frac{\sqrt{2}}{(x+1)\sqrt{x+3}}.$$

$-\sqrt{2}$ で割ると、

$$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+3}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcosh}\left(\frac{x+5}{x+1}\right) + C.$$

小問 (ii)

今度は外にある括弧が $x+3$ であるから、これを arcsin の公式の $x+b$ に合わせる。すなわち $b=3$ である。根号の中では $a+b+2x=2(x+1)$ が必要なので、$a+b=2$、$a=-1$ となる。すると $b-a=4$ であり、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin\left(\frac{x-1}{x+3}\right)=\frac{2}{(x+3)\sqrt{2x+2}}=\frac{\sqrt{2}}{(x+3)\sqrt{x+1}}.$$

考えてみよう $a=-1$ のとき、仮定 $x+a>0$ は $x>1$ を要求する。それでも答えは範囲 $x>-1$ 全体で成り立つだろうか？

成り立つ。上で見たように、arcsin の公式に必要なのは $x+b>0$ と $a+b+2x>0$ だけである。ここではそれらは $x+3>0$ と $2x+2>0$ であり、どちらもすべての $x>-1$ で成り立つ。この範囲で $(x-1)/(x+3)$ は -1 から 1 に向かって増加するので、arcsin は定義される。よって $x>-1$ において

$$\int\frac{1}{(x+3)\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{x-1}{x+3}\right)+C.$$

別解：置換

どちらの積分も、根号の中の式を $x+c$ として $u=\sqrt{x+c}$ と置換（substitution）すれば解ける。このとき $\mathrm{d}x=2u\,\mathrm{d}u$ となるからである。(ii) では $u=\sqrt{x+1}$ とおくと、積分は $\int\frac{2}{u^2+2}\,\mathrm{d}u=\sqrt{2}\arctan(\sqrt{(x+1)/2})+C$ となる。これは先の答えと定数 $-\pi/(2\sqrt{2})$ だけしか違わない。(i) では $u=\sqrt{x+3}$ とおくと $\int\frac{2}{u^2-2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{2}}\right|+C$ が得られる。これはまさに arcosh による答えを対数で書いたものである。

検算

- 答えを微分して戻してみる。たとえば $x=0$ で $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x-1}{x+3}$ の導関数は $\frac{1}{3}$ になるはずであり、上の式からは $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot3\cdot1}=\frac{1}{3}$ が得られる。
- 数値的には、シンプソンの公式（Simpson's rule）により $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x+3}}\approx0.374543$、$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x+3)\sqrt{x+1}}\approx0.240301$ である。どちらの値も原始関数（antiderivative）から得られる値と 10^{-12} より高い精度で一致する。この一致は、(ii) で $x+a<0$ となる範囲 $-1<x<1$ の内部である $x=-0.9$ まで下がる区間でも成り立つ。
- 符号：(i) の被積分関数は正なので、その積分は増加関数であるはずである。実際、答えはそうなっている。x が増加すると $\frac{x+5}{x+1}$ は減少するので、その arcosh に負号をつけたものは増加するからである。

よくある間違い

- 括弧と公式の対応を取り違える。(i) で根号の外にある $x+1$ は**小さいほうの**定数をもつので $x+a$ でなければならず、arcsin ではなく arcosh を使うことになる。
- $\sqrt{x+3}$ を $\sqrt{2x+6}/\sqrt{2}$ と書くことから生じる因子 $\sqrt{2}$ を忘れる。
- arcosh の導関数の負号を落とす。この負号は $\mathrm{d}z/\mathrm{d}x < 0$ から生じる。

STEP のその先へ

(ii) の二つの答え、すなわち arcsin によるものと arctan によるものは、定数だけ異なる。これが保証されるのは、**区間**上で同じ導関数をもつ二つの関数は定数だけ異なるからであり、これは平均値の定理（mean value theorem）の帰結である。二つの離れた部分からなる集合上では、それぞれの部分で定数が異なることもありうる。(i) に対数が現れるのも偶然ではない。逆双曲線関数（inverse hyperbolic functions）は姿を変えた対数であり、だからこそ $1/\sqrt{\text{二次式}}$ の積分は逆三角関数（inverse trigonometric functions）か対数のどちらかを与えるのである。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門）は平均値の定理を丁寧に証明しており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策問題集）にはこの種の積分がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。