解答例

STEP II 2003、第 9 問

力学 ・ 最大摩擦力でのつり合い

> **STEP II 2003、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q9

鍵となる考え方

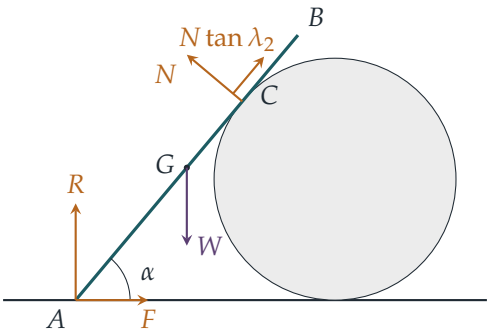
摩擦係数（coefficient of friction）が $\tan\lambda_1$ と $\tan\lambda_2$ の形で与えられているので、自然な道具は**全反力**（total reaction、垂直抗力と摩擦力を一つの力にまとめたもの）である。摩擦が限界に達しているとき、全反力は法線と摩擦角（angle of friction）λ をなす。すると棒には向きのわかった三つの力だけが働くことになり、水平方向と鉛直方向に分解すれば、二つの未知の大きさについての二つの方程式が得られる。本当に考えるべきことは、それぞれの摩擦力がどちら向きに働くかを決めることだけである。

解答

モデルと摩擦の向き

棒を一様な剛体の棒、円柱を固定されたものとして扱う。棒は円柱に接線に沿って接しているので、C における垂直抗力（normal reaction）は棒に垂直である。円柱は A から見て水平の正の向きの側にあるとする。このとき棒に働く力は次のとおりである。

- 重さ W。中点 G に鉛直下向きに働く。
- A において：鉛直上向きの垂直抗力 R と、床に沿った摩擦力（friction）F。
- C において：棒に垂直で、上向きかつ A の側へ戻る向きの垂直抗力 N と、棒に沿った摩擦力。



考えてみよう A と C で摩擦はどちら向きに働くか。棒が逆向きに滑り出す直前ということはありえないか。

両方の接触を保ったまま棒が動ける仕方は一通りしかない。A が床に沿って滑ると角 α が変わり、棒は円柱の上を滑る。A が円柱から遠ざかると棒は下がり（つまり α は減少し）、C にある棒の点は円柱に対して棒に沿って**下向きに**滑る。A が円柱に近づく場合は、すべてが逆になる。

後者の場合、A における摩擦は円柱から遠ざかる向きに、C における摩擦は棒に沿って下向きに働くことになる。すると水平方向の三つの力（A における摩擦、N の水平成分、C における摩擦の水平成分）がすべて円柱から遠ざかる向きになり、水平方向のつり合いは不可能である。したがって極限つり合い（limiting equilibrium）において棒は滑り落ちる直前にあり、A で棒に働く摩擦は円柱に**向かう**向き、C における摩擦は棒に沿って**上向き**に働く。図に描いたとおりである。

全反力

A における全反力を S、C における全反力を T とする。どちらの接触でも摩擦は限界に達しているので、

- $F = R\tan\lambda_1$ であるから、S は鉛直上向きと角 λ_1 をなし、円柱の側へ傾いている。
- 棒は水平と角 α をなすので、C における法線は鉛直上向きと角 α をなし、A の側へ傾いている。棒に沿って上向きの摩擦は、T を λ_2 だけ鉛直の側へ戻す。よって T は、円柱から遠い側で測って、鉛直上向きと角 $\alpha - \lambda_2$ をなす。

棒について力を分解すると、

$$\begin{aligned} &\text{水平方向：} && S\sin\lambda_1 = T\sin(\alpha-\lambda_2), \\ &\text{鉛直方向：} && S\cos\lambda_1 + T\cos(\alpha-\lambda_2) = W. \end{aligned}$$

T を消去するために、第 1 式に $\cos(\alpha-\lambda_2)$ を、第 2 式に $\sin(\alpha-\lambda_2)$ を掛け、第 2 式から第 1 式を引く。

$$S\left[\cos\lambda_1\sin(\alpha-\lambda_2)+\sin\lambda_1\cos(\alpha-\lambda_2)\right]=W\sin(\alpha-\lambda_2),$$
$$S\sin(\alpha+\lambda_1-\lambda_2)=W\sin(\alpha-\lambda_2),$$

ここで sin の加法定理（addition formula）を用いた。$\alpha\neq\lambda_2-\lambda_1$ と与えられているので、$\sin(\alpha+\lambda_1-\lambda_2)\neq 0$ である（角はすべて鋭角なので、$\alpha+\lambda_1-\lambda_2$ は $-\frac{\pi}{2}$ と π の間に厳密に含まれる）。よって割り算ができて、

$$S=\frac{W\sin(\alpha-\lambda_2)}{\sin(\alpha+\lambda_1-\lambda_2)}.$$

A における摩擦力は S の水平成分、すなわち $F=S\sin\lambda_1$ であるから、

$$F=\frac{W\sin\lambda_1\,\sin(\alpha-\lambda_2)}{\sin(\alpha+\lambda_1-\lambda_2)},$$

となり、示すべき式が得られた。同様にして、$T=W\sin\lambda_1/\sin(\alpha+\lambda_1-\lambda_2)$ である。

考えてみよう 一度もモーメントをとらなかった。怪しくはないか。

この問題では問題ない。二つの未知の大きさを求めるには、二方向への分解で十分である。A のまわりのモーメント（moment）をとると（S も、棒に沿って働く C における摩擦も、A のまわりのモーメントをもたない）、$N=T\cos\lambda_2$ として $N\cdot AC=W\cdot AG\cos\alpha$ が得られる。これからわかるのは、極限つり合いのために C がどこになければならないかということだけである。

$$\frac{AC}{AB}=\frac{\cos\alpha\,\sin(\alpha+\lambda_1-\lambda_2)}{2\sin\lambda_1\cos\lambda_2}.$$

与えられた条件 $AC>CB$ は、摩擦力を求めるのには必要ない。物理的には $S>0$ かつ $T>0$ も必要であり、これはちょうど $\alpha>\lambda_2$ のときに成り立つ。λ_2 より緩やかな角度で円柱に立てかけられた棒が、円柱を滑り落ちる直前にあることはありえない。

検算

- 床がなめらかな場合、$\lambda_1=0$：公式は $F=0$ を与え、当然そうなるべきである。
- $\alpha=\lambda_2$：このとき T は鉛直で、それだけで棒を支え、$F=0$ となる。これは棒がかろうじて円柱に立てかけていられる境界の角度である。
- 数値的に、$\lambda_1=0.3$、$\lambda_2=0.5$、$\alpha=1.0$（ラジアン）として、成分の方程式を R と N について直接解くと $F\approx 0.1975W$ となり、公式と一致する。この場合、A のまわりのモーメントから C は棒の約 0.75 の位置にあり、$AC>CB$ と矛盾しない。

よくある間違い

- C における抗力を鉛直、あるいは円柱の「てっぺん」に垂直だと考えてしまう。抗力は共通接線（common tangent）に垂直であり、共通接線とは棒そのものである。
- 摩擦の向きを確かめずに選んでしまう。誤った組合せでは、水平方向のつり合いが不可能になる。
- C における全反力を逆向きに傾けてしまう。すると $\alpha - \lambda_2$ の代わりに $\alpha + \lambda_2$ が現れる。

STEP のその先へ

全反力を法線に対して角 λ をなすものとしてとらえる考え方は、**摩擦円錐**（cone of friction）の背後にある発想である。接触が保たれるのは、全反力が法線のまわりの半頂角 λ の円錐の内側にとどまっている間である。三つの力の場合には、それらの作用線（line of action）が一点を通らなければならないので、多くの静力学（statics）の問題が幾何の問題になる。粗い接触が複数あり、どの順序で滑るかが重要になる問題は、剛体の静力学へのよい入門となる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、摩擦と剛体のつり合いを丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。