解答例

STEP II 2003、第 8 問

純粋数学 • 変数分離形の微分方程式

> **STEP II 2003、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q8

鍵となる考え方

この方程式は一階（first order）の変数分離形（separable）である。すなわち $\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ が t の有理関数（rational function）に等しい。2 次式を $t+1$ で割ると、その関数は多項式と簡単な分数の和に分かれ、それぞれはすぐに積分できる。さらに停留点（stationary points）は、解を微分するまでもなく微分方程式（differential equation）そのものから直ちに得られる。$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$ となるのは、ちょうど 2 次式 t^2-3t+2 が 0 になるところである。

解答

y を求める

多項式の割り算（polynomial division）により

$$\frac{t^2-3t+2}{t+1}=t-4+\frac{6}{t+1},$$

を得る。実際、$(t+1)(t-4)+6=t^2-3t-4+6=t^2-3t+2$ である。

解は $y=A>0$ から出発しなければならない。もし y がどこかで 0 になれば、この線形方程式の解の一意性（uniqueness）により、それは恒等的に 0 である解となり、$y(0)=A$ に矛盾する。したがって（係数が定義される $t>-1$ 上で）つねに $y>0$ であり、y で割ってよい：

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-k\left(t-4+\frac{6}{t+1}\right).$$

0 から t まで積分し、$\ln 1 = 0$ を用いると、

$$\ln \frac{y}{A} = -k\left(\frac{t^2}{2} - 4t + 6\ln(t+1)\right),$$

となるので、

$$\boxed{y = A\,(t+1)^{-6k}\,\mathrm{e}^{-k(t^2/2-4t)} = A\,(t+1)^{-6k}\,\mathrm{e}^{k(8t-t^2)/2}}.$$

停留値

微分方程式より

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -k\,\frac{(t-1)(t-2)}{t+1}\,y.$$

$k \neq 0$ と仮定する（そうでなければ $y \equiv A$ であり、すべての点が停留点となる）。$y > 0$ かつ $t+1 > 0$ であるから、導関数が 0 になるのは $t = 1$ と $t = 2$ のときに限られ、いずれも単根であるから、それぞれの点で符号が変わる。よって停留値（stationary values）はちょうど二つある：

$$y(1) = A \cdot 2^{-6k}\,\mathrm{e}^{-k(1/2-4)} = A \cdot 2^{-6k}\,\mathrm{e}^{7k/2},$$
$$y(2) = A \cdot 3^{-6k}\,\mathrm{e}^{-k(2-8)} = A \cdot 3^{-6k}\,\mathrm{e}^{6k}.$$

その比は

$$\frac{y(1)}{y(2)} = \frac{3^{6k}}{2^{6k}}\,\mathrm{e}^{7k/2-6k} = \left(\frac{3}{2}\right)^{6k}\mathrm{e}^{-5k/2},$$

であり、示すべきことが得られた。

考えてみよう 二つの停留値のうち、大きいのはどちらか。

対数をとると

$$\ln \frac{y(1)}{y(2)} = k\left(6\ln\tfrac{3}{2} - \tfrac{5}{2}\right),$$

であり、$6\ln 1.5 \approx 2.433 < 2.5$ であるから、括弧内は負である（およそ -0.067）。したがって $k > 0$ のとき $y(1) < y(2)$、$k < 0$ のとき $y(1) > y(2)$ である。差は小さいので、グラフのうねりは穏やかである。同様に

$$\ln \frac{y(1)}{A} = k\left(\tfrac{7}{2} - 6\ln 2\right) \approx -0.659k, \qquad \ln \frac{y(2)}{A} = k(6 - 6\ln 3) \approx -0.592k,$$

であるから、$k > 0$ のとき二つの停留値はともに A より小さく、$k < 0$ のときともに A より大きい。

$t \to +\infty$ のときの振る舞い

次のように書く：

$$\ln \frac{y}{A} = -k\left(\frac{t^2}{2} - 4t + 6\ln(t+1)\right).$$

$t \to \infty$ のとき括弧内は $+\infty$ に発散し、その主要項は $\frac{1}{2}t^2$ である（ln の項ははるかにゆっくり増加する）。したがって：

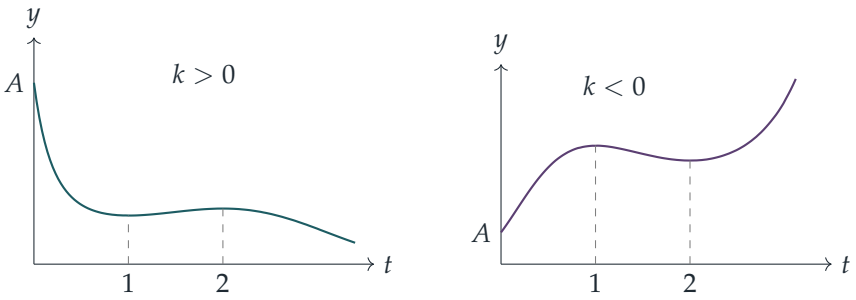
- $k > 0$ ならば $\ln(y/A) \to -\infty$ であるから、$y \to 0$ となる（$\mathrm{e}^{-kt^2/2}$ のように非常に速く）。
- $k < 0$ ならば $\ln(y/A) \to +\infty$ であるから、$y \to \infty$ となる（$\mathrm{e}^{|k|t^2/2}$ のように）。

グラフの概形

$t > 0$ において、$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ の符号は $-k(t-1)(t-2)$ の符号に等しい。

- $k > 0$：y は $(0,1)$ 上で A から減少して $t = 1$ で極小値（local minimum）をとり、増加して $t = 2$ で極大値（local maximum）をとり（それでも A より小さい）、その後 0 に向かって減少する。
- $k < 0$：y は A から増加して $t = 1$ で極大値をとり、減少して $t = 2$ で極小値をとり（それでも A より大きい）、その後限りなく増加する。

下のグラフは $A = 1$、$k = \pm 2$ として正確に描いたものである。



検算

- $t = 0$ のとき、公式は $A \cdot 1 \cdot \mathrm{e}^0 = A$ を与える。$\ln y = \ln A - 6k\ln(t+1) - k(t^2/2 - 4t)$ を微分すると $\frac{y'}{y} = -\frac{6k}{t+1} - k(t-4)$ となり、これをまとめ直すと元の方程式に戻る。
- 数値的に、$A = 1.5$、$k = \pm 2$ として微分方程式を 1 ステップずつ積分する（ルンゲ＝クッタ法、Runge–Kutta）と、$t = 3$ において公式の値が有効数字 8 桁まで再現される。$k = 2$ のとき比 $y(1)/y(2)$ は 0.8742 であり、$(1.5)^{12}\mathrm{e}^{-5}$ と一致する。

よくある間違い

- 割り算を間違える：余りは 6 であって 2 ではない。$t+1$ を掛け戻して確かめよ。

- 比を逆にする：求めるのは $y(1)/y(2)$ であり、指数の符号のせいでうっかり $y(2)/y(1)$ を求めてしまいやすい。
- 二つの極値点（turning points）を A の反対側に描いてしまう：先の計算により、$k > 0$ のときはどちらも A より下、$k < 0$ のときはどちらも A より上にある。

STEP のその先へ

この方程式は線形（linear）$y' + p(t)y = 0$ であり、その解 $A\exp\left(-\int_0^t p\right)$ は積分因子法（integrating-factor method）の最も簡単な場合である。また、常微分方程式（ODE）の最初の講義で出会う一般的な原理の例にもなっている。すなわち、解を求めなくても、方程式から直接定性的な性質（停留点、解の符号、増加や減衰）を読み取れることが多い、ということである。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）は、ここで y が決して 0 にならないことを示すのに用いた一意性定理も含めて、これら両方の考え方を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。