解答例

STEP II 2003、第 7 問

純粋数学 ・ 広義積分と級数

> **STEP II 2003、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q7

鍵となる考え方

$\ln x \times$ (累乗x) の形の被積分関数（integrand）は、部分積分（integration by parts）にうってつけである。対数を微分すれば、対数が消えるからである。これで最初の積分は処理できる。問題の残りの部分では、厳密な値 $2/(n^2\mathrm{e})$ を逆向きに用いる。すなわち、$1/n^2$ を積分として**表す**のである。そのうえで、すべての積分の下端を同じ場所にそろえる。これは各積分を大きくすることしかない。そして、積分の中で等比級数（geometric series）の和を求める。

解答

積分

$a > 1$ かつ $n > 0$ に対して

$$I_n(a) = \int_a^\infty \frac{\ln x}{x^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$$

とおく。$u = \ln x$、$\mathrm{d}v = x^{-n-1}\,\mathrm{d}x$ として部分積分を行うと、$v = -\frac{1}{n}x^{-n}$ である（ここで $n \neq 0$ を用いる）。区間 $[a, X]$ 上で

$$\begin{aligned}\int_a^X \frac{\ln x}{x^{n+1}}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\ln x}{nx^n}\right]_a^X + \frac{1}{n}\int_a^X x^{-n-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\ln a}{na^n} - \frac{\ln X}{nX^n} + \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{a^n} - \frac{1}{X^n}\right).\end{aligned}$$

ここで $X \to \infty$ とする。$n > 0$ より $X^{-n} \to 0$ である。もう一方の項については、$Y = X^n$ とおくと $\ln X = \frac{1}{n}\ln Y$ であり、

$$\frac{\ln X}{X^n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{\ln Y}{Y} \to 0,$$

となる。$X \to \infty$ のとき $Y \to \infty$ であり、$(\ln Y)/Y \to 0$ は仮定してよいからである。（ここで単に $(\ln X)/X \to 0$ を引用することはできない。$0 < n < 1$ のとき、X^n は X よりもゆっくり増加するからである。）したがって積分は収束（converge）し、

$$I_n(a) = \frac{\ln a}{na^n} + \frac{1}{n^2 a^n}.$$

である。$a = \mathrm{e}^{1/n}$ のとき $a^n = \mathrm{e}$、$\ln a = 1/n$ であるから、

$$I_n(\mathrm{e}^{1/n}) = \frac{1}{n^2\mathrm{e}} + \frac{1}{n^2\mathrm{e}} = \frac{2}{n^2\mathrm{e}},$$

となり、これが求める結果である。

2 つの積分の比較

$1 < a < b$ ならば

$$I_n(a) - I_n(b) = \int_a^b \frac{\ln x}{x^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$$

である。$x > 1$ に対して $\ln x > 0$ かつ $x^{n+1} > 0$ であるから、被積分関数は $[a, b]$ 上で真に正である。また被積分関数は連続であり、$b > a$ であるから、この積分は真に正である。よって $I_n(b) < I_n(a)$ である。下端を右へ動かすと、正の面積の一部を捨てることになるのである。

不等式

最初の部分より、すべての正の整数 n に対して

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\mathrm{e}}{2}\, I_n(\mathrm{e}^{1/n}).$$

である。

考えてみよう 和の各項では下端 $\mathrm{e}^{1/n}$ がそれぞれ異なるが、右辺では下端は $\mathrm{e}^{1/N}$ ただ 1 つである。一方から他方へはどのように移ればよいか。

$1 \le n \le N$ とする。このとき $1/N \le 1/n$ であるから、$1 < \mathrm{e}^{1/N} \le \mathrm{e}^{1/n}$ である。$n < N$ のときはこの不等式は等号を含まず、2 番目の部分（$a = \mathrm{e}^{1/N}$、$b = \mathrm{e}^{1/n}$ とする）より

$$I_n(\mathrm{e}^{1/n}) < I_n(\mathrm{e}^{1/N});$$

が成り立つ。$n = N$ のときは両辺は等しい。$n = 1, \ldots, N$ にわたって足し合わせると、$N > 1$ より少なくとも 1 つの項（たとえば $n = 1$）で $n < N$ となるから、和についても不等号は等号を含まない：

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{\mathrm{e}}{2} \sum_{n=1}^{N} I_n(\mathrm{e}^{1/n}) < \frac{\mathrm{e}}{2} \sum_{n=1}^{N} I_n(\mathrm{e}^{1/N}).$$

$N > 1$ が必要となるのはこの箇所である。$N = 1$ であれば両辺は等しくなってしまう。

あとは積分を足し合わせればよい。同じ範囲での収束する積分の有限和は、和の積分に等しいから、

$$\sum_{n=1}^{N} I_n(\mathrm{e}^{1/N}) = \int_{\mathrm{e}^{1/N}}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} x^{-(n+1)} \right) \ln x \, \mathrm{d}x.$$

である。括弧の中は、初項 x^{-2}、公比 $x^{-1} \neq 1$（$x > 1$ より）、項数 N の等比級数であり、

$$\sum_{n=1}^{N} x^{-(n+1)} = \frac{x^{-2}(1 - x^{-N})}{1 - x^{-1}} = \frac{1 - x^{-N}}{x^2 - x},$$

となる（分子と分母に x^2 を掛けた）。したがって

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} < \frac{\mathrm{e}}{2} \int_{\mathrm{e}^{1/N}}^{\infty} \left(\frac{1 - x^{-N}}{x^2 - x} \right) \ln x \, \mathrm{d}x,$$

となり、示すべき不等式が得られた。

検算

- $I_n(a)$ の式を a で微分してみよ。微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）が要求するとおり、被積分関数に負号をつけた $-\ln a / a^{n+1}$ が得られるはずである。
- 数値的に確かめる。置換 $x = \mathrm{e}^u$ により、最後の部分の積分は $\int_{1/N}^{\infty} u(1 - \mathrm{e}^{-Nu})/(\mathrm{e}^u - 1)\,\mathrm{d}u$ となる。$N = 2$ のとき右辺は約 1.4865 であり、これに対し左辺は $1 + \frac{1}{4} = 1.25$ である。$N = 10$ のとき右辺は約 2.0579 であり、左辺は 1.5498 である。
- $N \to \infty$ のとき右辺は $\frac{\mathrm{e}}{2} \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 - x}\,\mathrm{d}x$ に近づき、置換 $x = 1/t$ によりこれは $\frac{\mathrm{e}}{2} \int_0^1 \frac{-\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} \approx 2.236$ となる。これは当然そうあるべきとおり、$\pi^2/6 \approx 1.645$ を余裕をもって上回っている。

よくある間違い

- $(\ln X)/X^n$ を消すのに $(\ln X)/X \to 0$ を直接用いること。これは $n \geq 1$ のときには通用するが、結果はすべての $n > 0$ について主張されている。
- 下端を逆向きに動かすこと。$\mathrm{e}^{1/N}$ は $\mathrm{e}^{1/n}$ たちの中で**最小**であるから、どの積分も大きくなる。
- 理由を述べずに等号を含まない不等式を主張すること。$n = N$ の項では等号が成り立つので、等号が成り立たないのは $n < N$ の項があるためであり、そのような項は $N > 1$ だから存在するのである。

STEP のその先へ

数を積分として表し、積分記号の下で和をとるというのは、解析学（analysis）における定番の手法である。極限をとると $\sum 1/n^2 = \int_0^1 \frac{-\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t$ が得られ、これは $\pi^2/6$ に至る道筋の 1 つである。$N \to \infty$ とすることは、無限和と広義積分（improper integral）を入れ替えることにあたる。この入れ替えには正当化が必要であり、それは単調収束定理（monotone convergence theorem）や優収束定理（dominated convergence theorem）によってなされる。これらの定理は、解析学や測度論（measure theory）の最初の講義で学ぶことになる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、こうした入れ替えがなぜ失敗しうるのか、そしていつ安全なのかを知るのに親しみやすい一冊である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。