解答例

STEP II 2003、第 6 問

純粋数学 • 関数の反復合成と積分

> **STEP II 2003、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q6

鍵となる考え方

f をもう一度適用するということは、「1 を引き、負になった部分を軸の上へ折り返す」ということである。ある区間で値が 0 と 1 の間にあるグラフにこれを施すと、その区間の部分は帯 $0 \le y \le 1$ の中で単に上下が反転し、一方で長くまっすぐな腕の部分には歯がひとつ増える。こうしてグラフはジグザグ、すなわち三角波（triangle wave）になる。このことが見えれば、最後の小問の二つの積分はどちらも、同じ形の周期を足し合わせるだけのものになる。

解答

グラフの概形

すべては次の二つの事実から導かれる。

漸化式（*recurrence*）。 $g_{n+1} = f \circ g_n$ であるから、$g_{n+1}(x) = |g_n(x) - 1|$ である。すなわち、g_n のグラフを 1 だけ下へ平行移動し、x 軸より下にある部分を折り返せばよい。

対称性（*symmetry*）。$f(2-x) = |1-x| = f(x)$ であるから、$n \ge 2$ に対して $g_n(2-x) = g_{n-1}(f(2-x)) = g_{n-1}(f(x)) = g_n(x)$ が成り立ち、$n = 1$ のときは直接確かめられる。よって、どの g_n も直線 $x = 1$ に関して対称であり、$x \ge 1$ の部分を調べれば十分である。

まず $g_1(x) = |x - 1|$ は、頂点が $(1, 0)$ の V 字形である。

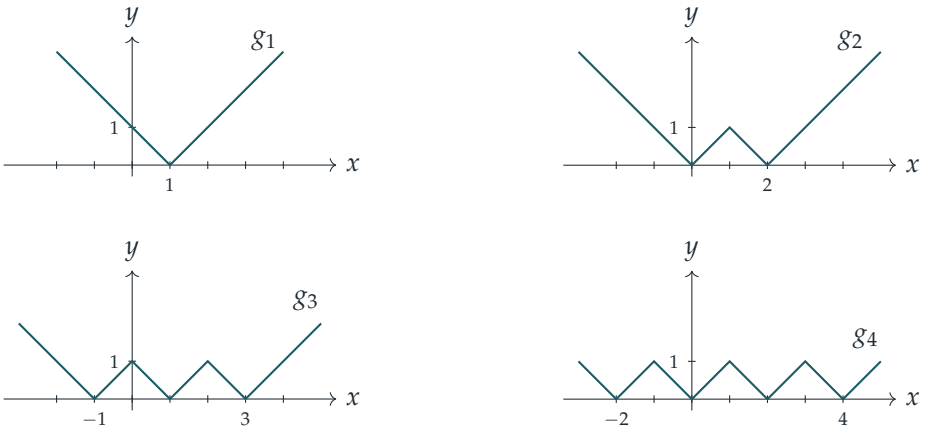
g_2 について：$[0, 2]$ では $0 \le g_1 \le 1$ であるから $g_2 = 1 - |x - 1|$ となる。これは $x = 1$ で 1 まで上がり、$x = 0$ と $x = 2$ で 0 まで下がるテント形である。$x \ge 2$ では $g_2 = x - 2$

であり、対称性より $x \leq 0$ では $g_2 = -x$ である。よって g_2 は W 字形である。

その後の各段階でも同じことが起こる。ジグザグの部分（値は $[0,1]$ に入る）は上下が反転し、まっすぐな腕 $x-n$ は $|x-n-1|$ となって、$[n, n+1]$ 上に（対称性により $[1-n, 2-n]$ 上にも）歯がひとつ加わる。x から最も近い偶数までの距離を $d_{\text{even}}(x)$、最も近い奇数までの距離を $d_{\text{odd}}(x)$ と書くと、次が得られる。

$$g_n(x) = \begin{cases} 2-n-x, & x \leq 2-n, \\ d_{\text{even}}(x)(n \text{ が偶数のとき}),\ d_{\text{odd}}(x)(n \text{ が奇数のとき}), & 2-n \leq x \leq n, \\ x-n, & x \geq n. \end{cases}$$

これは漸化式から数学的帰納法（induction）によって示される。すべての実数 x について $d_{\text{even}} + d_{\text{odd}} = 1$ である（連続する二つの整数の間では、二つの距離は t と $1-t$ になる）から、「1 からジグザグを引く」操作は偶奇を入れ替える。また $[n, n+1]$ 上の新しい部分 $n+1-x$ は、ちょうど $n+1$ までの距離であり、$n+1$ は新しい偶奇をもつ最も近い整数である。左側については $x=1$ に関する対称性から従う。



言葉で述べると次のようになる。g_3 は $-1, 1, 3$ に零点をもち、0 と 2 で高さ 1 の山をもち、腕は $y = -1-x$ と $y = x-3$ である。g_4 は $-2, 0, 2, 4$ に零点をもち、$-1, 1, 3$ で高さ 1 の山をもち、腕は $y = -2-x$ と $y = x-4$ である。四つのグラフはいずれも $x=1$ に関して対称である。

積分

n を偶数とする。$n \geq 2$ であるから、区間 $[0, n]$ は $[2-n, n]$ に含まれ、その上で $g_n(x) = d_{\text{even}}(x)$ である。

考えてみよう なぜ $[0,2]$ 上で積分すれば十分なのだろうか。

二つの関数はどちらも周期（period）2 をもつ。2 だけずらすと偶数は偶数に移るから $d_{\text{even}}(x+2) = d_{\text{even}}(x)$ であり、また $\left|\sin\frac{\pi(x+2)}{2}\right| = \left|-\sin\frac{\pi x}{2}\right| = h(x)$ である。n は偶数なので、$[0,n]$ はちょうど $\frac{n}{2}$ 個の完全な周期 $[0,2],[2,4],\ldots,[n-2,n]$ からなる。よって $[0,n]$ 上の各積分は、$[0,2]$ 上の積分の $\frac{n}{2}$ 倍である。

$[0,2]$ 上で g_n はテント形 $1-|x-1|$、すなわち底辺 2、高さ 1 の三角形であるから、

$$\int_0^2 g_n(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 = 1.$$

$[0,2]$ 上では $\frac{\pi x}{2} \in [0,\pi]$ であるから $\sin\frac{\pi x}{2} \geq 0$ となり、絶対値（modulus）を外せる。

$$\int_0^2 h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\Big]_0^2 = \frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

したがって

$$\int_0^n \big(h(x)-g_n(x)\big)\,\mathrm{d}x = \frac{n}{2}\Big(\frac{4}{\pi}-1\Big) = \frac{2n}{\pi}-\frac{n}{2},$$

となり、示すべき式が得られた。

検算

- 値をひとつ選んで手で反復してみる。$g_4(-1)$ は $-1\to 2\to 1\to 0\to 1$ となるので $g_4(-1)=1$ であり、概形図のとおり山になっている。
- $4/\pi \approx 1.27 > 1$ であるから答えは正である。正弦曲線の山は、同じ底辺と高さをもつ直線の辺のテントよりも外側に膨らんでおり、二つのグラフの図と合っている。
- 数値的には、$n=2$ のときシンプソンの公式（Simpson's rule）で 0.273240 が得られ、$\frac{4}{\pi}-1 \approx 0.273240$ と一致する。$n=4,6,8,10$ についても同様に一致する。

よくある間違い

- 左側を忘れること。$n\geq 3$ になると、$x<0$ の部分のグラフは直線ではない。対称性 $g_n(2-x)=g_n(x)$ を使うのが、正しく描く最も手早い方法である。
- 絶対値をつけずに $\sin\frac{\pi x}{2}$ を $[0,n]$ 上で積分してしまうこと。そうすると偶数の n に対して $\frac{2n}{\pi}$ ではなく 0 になってしまう。

STEP のその先へ

単純な写像を反復し、グラフがどうなるかを観察することは、離散力学系（discrete dynamical systems）の出発点である。ここではジグザグが三角波に落ち着くが、これ

と密接に関係する「テント写像（tent map）」はカオス（chaos）の古典的な例である。また、h と三角波の比較はフーリエ級数（Fourier series）へとつながる。フーリエ級数では三角波を正弦と余弦の和として表し、$|\sin|$ はその最初の例のひとつである。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）には、フーリエ級数への読みやすい入門がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。